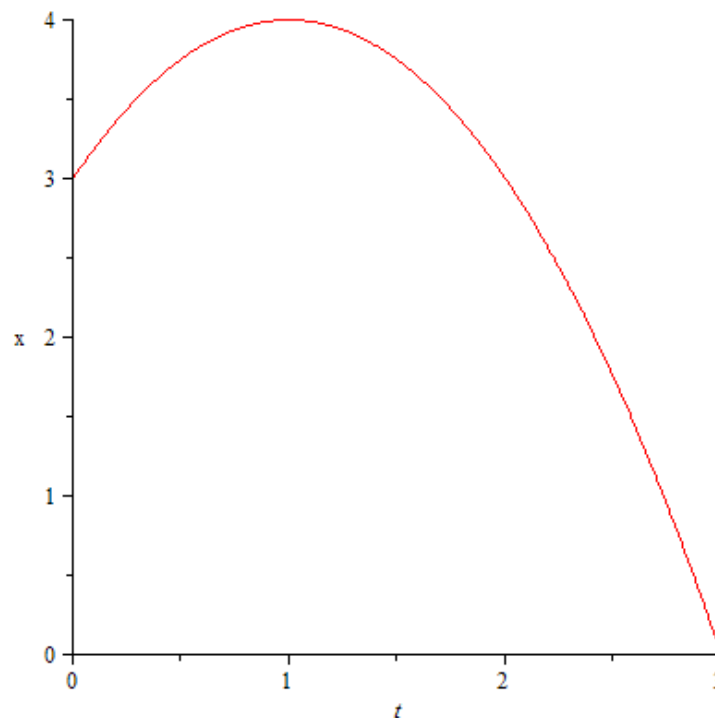


# 1 La cinématique

## 1.1 Qu'est-ce que la cinématique

La cinématique est la branche de la physique qui décrit le mouvement des objets. Par exemple, en donnant la position en fonction du temps à l'aide d'une formule telle que  $x = (3 + 2t - t^2)m$ .

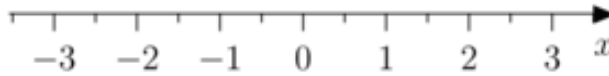
Il existe en fait toute une variété de possibilités puisqu'on pourrait, par exemple, donner la vitesse en fonction du temps ou en fonction de la position. On pourrait aussi donner un graphique de la position ou de la vitesse en fonction du temps. Avec la formule donnée précédemment, on a le graphique suivant pour la position en fonction du temps.



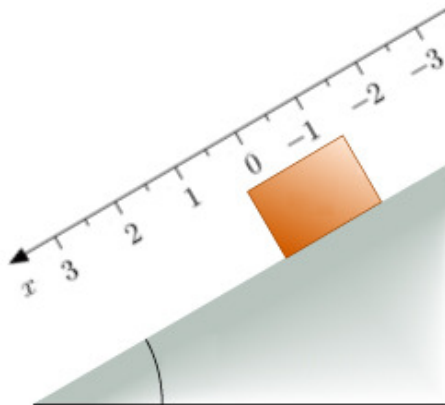
Cette branche de la physique est une des plus anciennes de la physique puisque les équations décrivant le mouvement d'un objet qui a une accélération constante datent du 14<sup>e</sup> siècle.

## 1.2 La position et le déplacement

Dans ce chapitre, nous allons commencer par étudier le mouvement en une dimension, c'est-à-dire les objets qui se déplacent en ligne droite. Pour donner la position le long de cette ligne, nous allons bien sûr utiliser un axe.



Les valeurs de  $x$  augmentent en allant vers la droite, mais on pourrait très bien choisir un axe des  $x$  avec des valeurs qui augmentent à mesure qu'on va vers la gauche. De plus, bien qu'on montre ici un axe horizontal, il pourrait aussi bien être vertical si on veut décrire un mouvement de chute libre. Les valeurs de la position pourraient augmenter à mesure qu'on monte ou augmenter à mesure qu'on descend. On pourrait alors noter la position avec le symbole  $y$ , quoiqu'il serait très correct de continuer de l'appeler  $x$ . L'axe pourrait également être incliné, par exemple si on veut décrire la position d'un objet qui descend le long d'un plan incliné.



Il restera simplement à décider où est le  $x = 0$ . Très souvent, on met le  $x = 0$  à la position initiale de l'objet.

Le déplacement de l'objet est simplement le changement de position de l'objet. Si l'objet est au départ à la position  $x_1$  et que plus tard il est la position  $x_2$ , alors le déplacement est

### Déplacement

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (1.1)$$

Il est important de ne pas confondre le déplacement et la distance qu'a parcourue l'objet. Si on lance un objet à une hauteur de 20 m et qu'on le rattrape, la distance parcourue par l'objet est de 40 m alors que le déplacement est nul puisqu'on est revenu à la position de départ. Pour le déplacement, on regarde uniquement les positions initiale et finale. Ce qui s'est passé entre ces deux instants n'a aucune importance.

## 1.3 La vitesse moyenne

La vitesse moyenne est

### Vitesse moyenne

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.2)$$

À ne pas confondre avec la vitesse scalaire moyenne qui est

$$\text{vitesse scalaire moyenne} = \frac{\text{distance}}{\Delta t}$$

et qui sera peu utilisée ici.

### Exemple 1.3.1

Un objet se déplace sur l'axe des  $x$  en partant de  $x = 0$ . Il va à  $x = 50$  m en 5 secondes puis va à  $x = -10$  m en 15 secondes.

a) Quel est le déplacement de cet objet

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -10\text{m} - 0\text{m} = -10\text{m}$$

b) Quelle est la distance parcourue par cet objet?

L'objet a fait 50 m vers la droite puis 60 m vers la gauche, la distance parcourue est donc de 110m

c) Quelle est la vitesse moyenne de cet objet

$$\bar{v} = \frac{-10\text{m}}{20\text{s}} = -0,5\text{m/s}$$

d) Quelle est la vitesse scalaire moyenne

$$\text{vitesse scalaire moyenne} = \frac{110\text{m}}{20\text{s}} = 5,5\text{m/s}$$

**Exemple 1.3.2**

Conrad part de Québec pour se rendre à Montréal en auto. Il parcourt les 250 km en allant à 100 km/h pour les premiers 125 km, puis en allant à 80 km/h pour les derniers 125 km. Quelle est sa vitesse moyenne?

C'est tentant de dire 90 km/h, mais ce n'est pas la bonne réponse. Faisons-le correctement en calculant le temps que prend Conrad pour aller à Montréal. En prenant l'équation de la vitesse moyenne pour la première partie, on trouve que cette partie dure

$$100 \text{ km} / \text{h} = \frac{125 \text{ km}}{t_1}$$

$$t_1 = 1,25 \text{ h}$$

En prenant l'équation de la vitesse moyenne pour la deuxième partie, on trouve que cette partie dure

$$80 \text{ km} / \text{h} = \frac{125 \text{ km}}{t_1}$$

$$t_1 = 1,5625 \text{ h}$$

La durée totale du voyage est donc  $1,25 \text{ h} + 1,5625 \text{ h} = 2,8125 \text{ h}$

La vitesse moyenne est donc

$$\bar{v} = \frac{250 \text{ km}}{2,8125 \text{ h}} = 88,89 \text{ km} / \text{h}$$

Vous pouvez voir que deux unités acceptables pour la vitesse sont des m/s et des km/h. En fait, plusieurs unités sont possibles, pourvu que ce soit toujours une unité de distance divisée par une unité de temps. Ainsi, des mm/jours seraient tout à fait acceptables comme unité de vitesse.

Mais comment peut-on passer d'une unité à l'autre? Voici comment on passerait de km/h à m/s

$$45 \text{ km} / \text{h} = 45 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \times \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 12,5 \text{ m} / \text{s}$$

On commence par changer les km en m en faisant la première multiplication, qui vaut 1 en fait puisque 1000 m et 1 km, c'est pareil. Les km sont en bas de la division pour éliminer les km de l'unité de départ. On change ensuite les h en s en faisant la deuxième multiplication, qui vaut aussi 1 puisque 1 h et 3600 s, c'est pareil. Cette fois-ci, les h sont en haut de la fraction pour éliminer les h de l'unité de départ. Remarquer qu'avec les unités qui s'annulent, il reste des m/s.

## La représentation graphique de la vitesse moyenne

Sur un graphique de la position en fonction du temps, la vitesse moyenne représente la pente de la droite qui relie les points qui correspondent au temps entre lesquels on veut savoir la vitesse moyenne. Prenons un exemple

### Exemple 1.3.3

La position d'un objet est donnée par la formule  $x = (3 + 2t - t^2)m$ . Quelle est la vitesse moyenne entre  $t = 0$  s et  $t = 1$  s ?

La vitesse moyenne est

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Il faut donc trouver les positions à  $t = 0$  et  $t = 1$

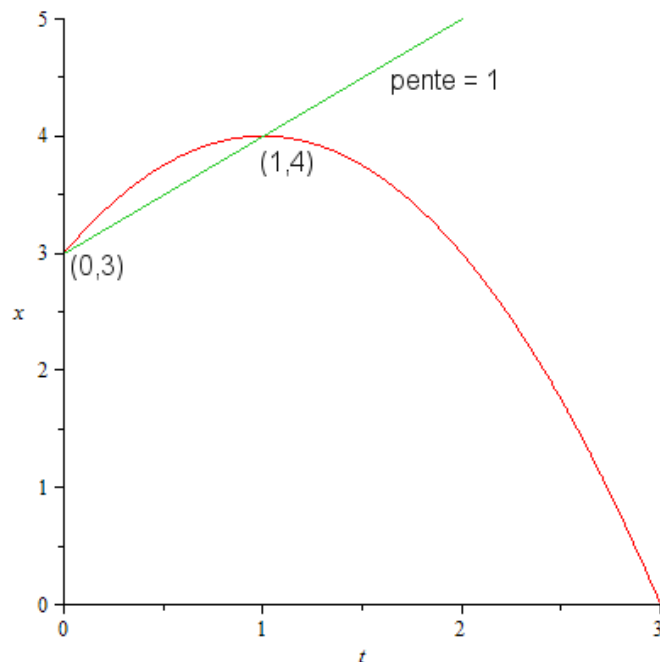
À  $t = 0$  s, la position est  $x_1 = (3 + 2 \times 0 - 0^2)m = 3m$

À  $t = 1$  s, la position est  $x_2 = (3 + 2 \times 1 - 1^2)m = 4m$

La vitesse moyenne est donc

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4m - 3m}{1s} = 1m/s$$

Sur le graphique, nos deux points importants sont (0,3) et (1,4). La vitesse moyenne représente la pente d'une droite reliant ces deux points.



## 1.4 La vitesse instantanée

### Équation de la vitesse

Tout au long d'une trajectoire, la vitesse peut varier. Comme dans l'exemple précédent, on avait une vitesse moyenne de 88,89 km/h, mais notre vitesse avait varié durant le trajet. On pourrait aussi aller à Montréal en ayant une vitesse variant constamment, par exemple en allant toujours de plus en plus vite. Comment alors savoir notre vitesse à un moment précis de la trajectoire?

Pour y arriver, il faut calculer la vitesse de la même façon que celle utilisée pour calculer la vitesse moyenne, mais en prenant un temps très court, de sorte que la vitesse n'a pas le temps de changer. Mais quel temps en suffisamment petit! Est-ce qu'une seconde c'est assez court? Pour une auto, ça peut sembler correct sauf que la vitesse d'une voiture peut changer très rapidement lors d'un freinage intense et encore plus lors d'un accident. Il faudrait donc un temps encore plus court. Peut-être un milliardième de seconde? Pour une auto, c'est sûrement bon, mais c'est trop long pour des particules, comme des électrons qui peuvent changer de vitesse très rapidement.

En fait, pas besoin de trouver ce temps très petit qui pourrait s'adapter à toutes les situations puisque ce temps très court existe en mathématique : c'est une durée de temps infinitésimale. En prenant cette valeur, on obtient, pour la vitesse instantanée,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ce qui est

#### Vitesse instantanée

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1.3)$$

#### Exemple 1.4.1

La position d'un objet est donnée par la formule  $x = (3 + 2t - t^2) \text{ m}$ . Quelle est sa vitesse à  $t = 2 \text{ s}$  ?

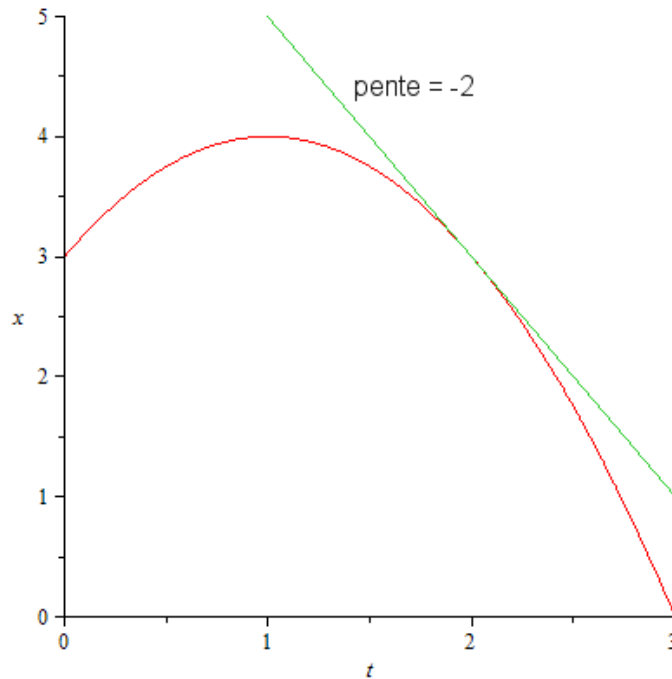
Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a

$$v = (2 - 2t) \text{ m/s}$$

La vitesse à  $t = 2 \text{ s}$  est donc  $-2 \text{ m/s}$

## La représentation graphique de la vitesse

Puisque la vitesse instantanée est la dérivée, cela signifie que sur un graphique de la position en fonction du temps, la vitesse instantanée est la pente de la tangente.



## 1.5 Accélération

### L'équation de l'accélération

L'accélération nous indiquera si la vitesse d'un objet varie. Elle nous dit de combien la vitesse augmente à chaque unité de temps. L'accélération moyenne est définie par

#### Accélération moyenne

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.4)$$

Les unités SI de l'accélération sont des  $\frac{m}{s}$ , que l'on peut écrire  $m/s^2$ .

Si un objet a une accélération moyenne de  $3 \text{ m/s}^2$ , cela signifie qu'en moyenne, sa vitesse augmente de  $3 \text{ m/s}$  chaque seconde.

**Exemple 1.5.1**

Voici la vitesse d'un objet à deux moments

$$\text{À } t = 0 \text{ s, } v = 0 \text{ m/s}$$

$$\text{À } t = 2 \text{ s, } v = 10 \text{ m/s vers la droite}$$

Quelle est son accélération moyenne?

L'accélération moyenne est

$$\bar{a} = \frac{10 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}^2$$

L'exemple suivant montre qu'il faut faire attention au signe de la vitesse quand on calcul l'accélération moyenne.

**Exemple 1.5.2**

Voici la vitesse d'un objet à deux moments

$$\text{À } t = 0 \text{ s, } v = 10 \text{ m/s vers la gauche}$$

$$\text{À } t = 20 \text{ s, } v = 50 \text{ m/s vers la gauche}$$

Quelle est son accélération moyenne?

L'accélération moyenne est

$$\bar{a} = \frac{-50 \text{ m/s} - (-10 \text{ m/s})}{20 \text{ s}} = -2 \text{ m/s}^2$$

Dans ce dernier exemple, on a inscrit les valeurs des vitesses avec des signes négatifs puisque la vitesse est vers la gauche et que normalement l'axe est positif vers la droite. En fait, on peut décider à chaque problème dans quelle direction est notre sens positif. Si la vitesse est dans cette direction, elle est positive, si elle est dans la direction opposée, elle est négative.

Cet exemple montre également qu'une accélération négative ne veut pas nécessairement dire que la vitesse de l'objet diminue puisque dans l'exemple, l'accélération était négative et pourtant la vitesse est passée de 10 m/s à 50 m/s. La règle correcte est plutôt la suivante :

Si la vitesse et l'accélération ont des signes identiques, alors la vitesse augmente.

Si la vitesse et l'accélération ont des signes opposés, alors la vitesse diminue.

Pour comprendre cette règle, il ne faut pas oublier que l'accélération représente la vitesse qui est ajoutée à chaque instant. Ainsi, si un objet a une vitesse de -100 m/s et que l'accélération moyenne est de 5 m/s<sup>2</sup>, cela veut dire que chaque seconde, on ajoute 5 m/s à la vitesse. On aura alors

$$t = 0 \text{ s, } v = -100 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}t &= 1 \text{ s}, v = -95 \text{ m/s} \\t &= 2 \text{ s}, v = -90 \text{ m/s} \\t &= 3 \text{ s}, v = -85 \text{ m/s} \\t &= 4 \text{ s}, v = -80 \text{ m/s}\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que la grandeur de la vitesse diminue, ce qui arrive quand la vitesse et l'accélération sont de signes contraires selon nos règles.

Évidemment, l'accélération moyenne c'est une valeur moyenne. Parfois, la vitesse pourrait augmenter rapidement et parfois elle pourrait augmenter plus lentement. C'est le cas en voiture quand on démarre : notre vitesse augmente rapidement au départ et plus lentement par la suite. On pourrait donc définir une accélération instantanée qui nous renseigne sur le rythme d'augmentation de la vitesse à un moment précis. L'astuce est la même que pour la vitesse instantanée puisqu'il faut utiliser le changement de vitesse durant un temps très court, de sorte que l'accélération n'a pas le temps de changer. On obtient ainsi

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

et donc

### Accélération instantanée

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (1.5)$$

### Exemple 1.5.3

La position d'un objet est donnée par la formule  $x = (3 - t + 2t^2 + t^3) \text{ m}$

Quelle est son accélération à  $t = 2 \text{ s}$  ?

Puisque l'accélération est la dérivée de la vitesse, commençons par trouver la formule de la vitesse.

$$v = \frac{dx}{dt} = (-1 + 4t + 3t^2) \text{ m/s}$$

On peut ensuite trouver l'accélération en dérivant cette vitesse

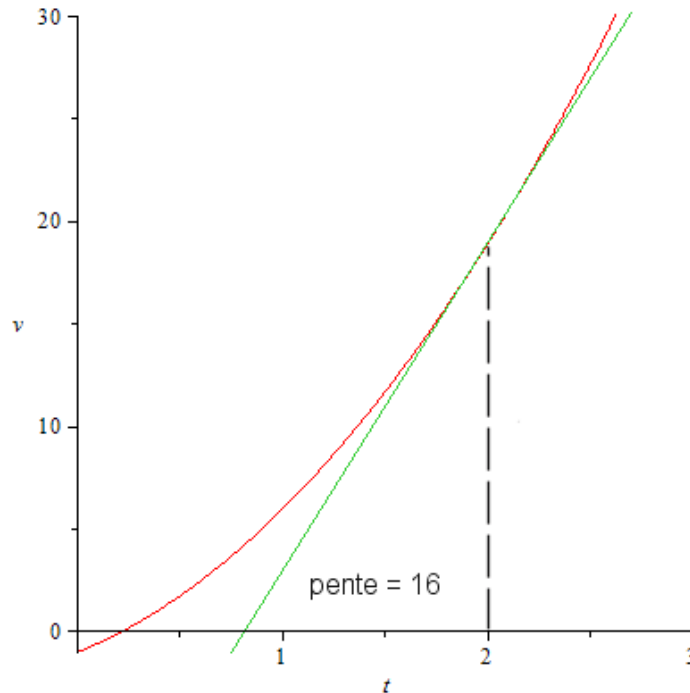
$$a = \frac{dv}{dt} = (4 + 6t) \text{ m/s}^2$$

À  $t = 2 \text{ s}$ , on obtient

$$a = (4 + 6 \times 2) \text{ m/s}^2 = 16 \text{ m/s}^2$$

## La représentation graphique de l'accélération

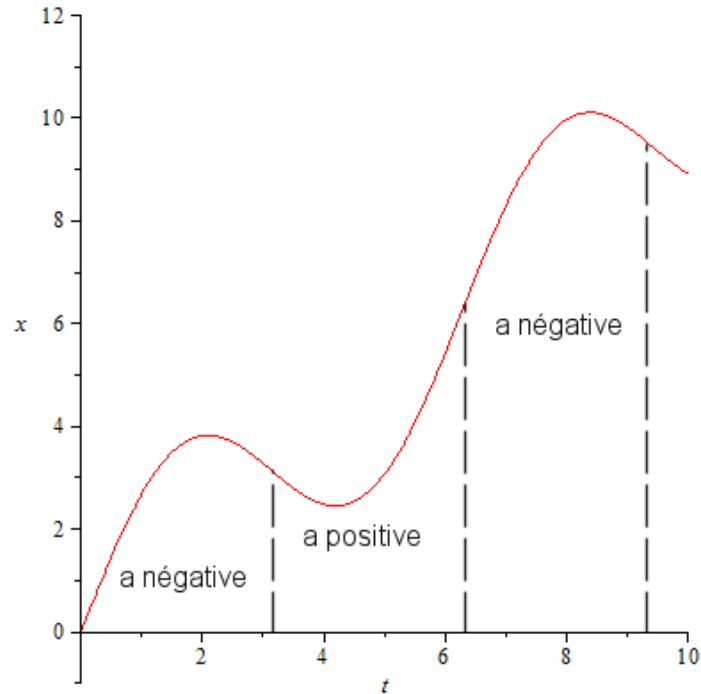
Puisque l'accélération est la dérivée de la vitesse, on comprend assez vite que sur un graphique de la vitesse en fonction du temps, la pente représente l'accélération. Si on prend les données de l'exemple précédent, on a



On peut également avoir une idée de l'accélération à partir du graphique de la position en fonction du temps. Comme l'accélération est la dérivée de la vitesse et que cette dernière est la dérivée de la position, cela signifie que l'accélération est la dérivée seconde de la position

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Comme cette dérivée seconde représente la concavité sur un graphique, on en déduit que la concavité sur un graphique de la position en fonction du temps représente l'accélération. Évidemment, c'est plus difficile d'avoir une idée de la valeur exacte de l'accélération avec la concavité, mais chose certaine, on peut facilement déterminer son signe comme le montre le graphique suivant.



## La variation de l'accélération

Il se peut aussi que l'accélération ne soit pas constante et qu'elle change. On pourrait alors mesurer à quel rythme varie cette accélération et calculer le taux de variation moyen de l'accélération. On obtient alors le « jerk »

$$\bar{j} = \frac{a_f - a_i}{\Delta t} = \frac{\Delta a}{\Delta t}$$

Il existe aussi le jerk instantané qui est

$$j = \frac{da}{dt}$$

Bien que cette notion ne sera pas utilisée dans ce cours, c'est le fun de savoir que ça existe. De plus, ça aide à comprendre des blagues du type de celle sur ce t-shirt, blague que très peu de gens vont comprendre 😊.



On a aussi proposé que le taux de variation du jerk soit le snap, que le taux de variation du snap soit le crackle et que le taux de variation de crackle soit le pop ! (Ce sont les équivalents de cric, crac et croc des rice crispies en anglais)

## 1.6 Le mouvement rectiligne à accélération constante (MRUA)

### Les équations du mouvement

Examinons ce qui arrive si l'accélération est une constante. Comme on sait que

$$a = \frac{dv}{dt}$$

on peut trouver la vitesse en fonction du temps en se demandant ce qu'il aurait fallu dériver pour obtenir la constante  $a$ . De toute évidence, c'est

$$v = at + cst$$

On peut trouver la valeur de la constante en disant que la vitesse au temps  $t = 0$  est la vitesse initiale et qu'elle sera notée  $v_0$ . Si on met ces valeurs dans l'équation, on a alors

$$v_0 = a \times 0 + cst$$

et donc que  $cst = v_0$ . On a alors.

$$v = v_0 + at \quad (1.6)$$

On peut également trouver la position en fonction du temps. Comme

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v_0 + at = \frac{dx}{dt}$$

on peut trouver la position en se demandant ce qu'il aurait fallu dériver pour obtenir  $v_0 + at$ . Bien sûr, c'est

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + cst$$

Encore une fois, on trouve la constante en disant que la position au temps  $t = 0$  est la position initiale  $x_0$ . On a alors, si on remplace dans l'équation de la position

$$x_0 = v_0 \times 0 + \frac{1}{2} a \times 0^2 + cst$$

La constante vaut donc  $x_0$ . On a alors

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1.7)$$

Bien que tout semble complet puisqu'on a la position et la vitesse en fonction du temps, on peut trouver deux autres équations qui seront souvent très utiles. On va premièrement faire une équation qui relie la vitesse et la position, sans faire appel au temps. Pour y arriver, il faut isoler  $t$  dans l'équation 1.6

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

et remplacer dans l'équation 1.7 pour obtenir

$$x = x_0 + v_0 \left( \frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

On travaille ensuite un peu pour obtenir

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{2a} \\ x - x_0 &= \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{2a} \\ 2a(x - x_0) &= 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 v + v_0^2 \end{aligned}$$

Pour finalement obtenir

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \quad (1.8)$$

On va finalement faire une équation qui donne la position en fonction du temps, mais qui ne fait pas appel à l'accélération. Si on isole  $a$  dans l'équation 1.6, on a

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

Si on remplace dans l'équation 1.7, on obtient

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \left( \frac{v - v_0}{t} \right) t^2$$

Si on simplifie, on a alors

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \quad (1.9)$$

Nous avons maintenant quatre belles équations qui nous permettent de résoudre le MRUA. Mais attention : rappelez-vous que ces quatre équations ne sont bonnes que pour un mouvement à **accélération constante**. Ne les utilisez pas si l'accélération change...

Dans la plupart des cas, la résolution des problèmes à accélération constante est assez simple puisqu'il y aura presque toujours une des quatre équations qui va vous permettre de trouver ce que vous cherchez. On passe les quatre équations une après l'autre en identifiant les inconnues dans chaque équation. Presque toujours, il y aura une équation pour laquelle notre seule inconnue sera ce qu'on cherche.



### Erreur fréquente : mauvais signe pour $v$ ou $a$

Assurez-vous de définir clairement une direction positive pour le mouvement. Si un vecteur (vitesse ou accélération) est dans la direction opposée à votre direction positive, elle est négative

### Exemple 1.6.1

Un avion passe de 0 m/s à 100 m/s en 8 secondes avec une accélération constante.

a) Calculer son accélération.

La première équation nous donne

$$v = v_0 + at$$

$$100\text{ m/s} = 0\text{ m/s} + a \times 8\text{ s}$$

Ce qui nous donne  $a = 12,5 \text{ m/s}^2$

b) Quelle distance a alors fait l'avion?

La deuxième équation nous donne

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = 0 + 0 \times 8\text{ s} + \frac{1}{2} 12,5\text{ m/s}^2 \times (8\text{ s})^2$$

$$x = 400\text{ m}$$

Notez qu'on aurait pu utiliser les troisième ou quatrième équations pour résoudre cette partie du problème puisque dans ces trois équations, notre seule inconnue était la position

Inutile de s'attarder davantage à ces cas plutôt simples. Attardons-nous à des cas un peu plus complexes dans lesquelles aucune équation ne permet de résoudre le problème directement.

### Exemple 1.6.2

Une voiture passe à côté d'un poteau de téléphone avec une vitesse de 90 km/h et une accélération de  $3 \text{ m/s}^2$ . À quelle distance du poteau était-il deux secondes plus tôt ?

1<sup>re</sup> solution

On connaît la vitesse à  $t = 2$  (25 m/s) et l'accélération. On va mettre l'origine de l'axe  $x = 0$  au poteau et on va chercher  $x_0$ . Si on examine les quatre équations

$v = v_0 + at$	Inconnu : $v_0$
$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	Inconnus : $v_0$ et $x_0$
$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$	Inconnus : $v_0$ et $x_0$
$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$	Inconnus : $v_0$ et $x_0$

On voit qu'aucune équation ne permet de trouver directement  $x_0$ . Par contre, on peut facilement trouver une stratégie pour résoudre ce problème. On va trouver  $v_0$  avec la première équation et ensuite on pourra trouver  $x_0$  avec n'importe laquelle des trois autres équations puisqu'il ne restera que  $x_0$  comme inconnu dans les trois cas.

On trouve donc  $x_0$  avec la première équation

$$v = v_0 + at$$

$$25 = v_0 + 3 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ s}$$

$$v_0 = 19 \text{ m/s}$$

On trouve ensuite la position initiale avec la deuxième équation (on pourrait prendre la troisième ou la quatrième)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$0 = x_0 + 19 \text{ m/s} \times 2 \text{ s} + \frac{1}{2} 3 \text{ m/s}^2 \times (2 \text{ s})^2$$

$$x_0 = -44 \text{ m}$$

L'auto était donc à 44 m du poteau 2 secondes plus tôt

2<sup>e</sup> solution

On peut réussir ce problème avec une seule équation si on décide plutôt que le temps  $t = 0$  est quand l'auto est vis-à-vis du poteau. On cherche alors la vitesse quand  $t = -2$  s. En ayant toujours  $x = 0$  au poteau, on réussit directement ce problème avec la deuxième équation

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = 0 + 25 \text{ m/s} \times -2 \text{ s} + \frac{1}{2} 3 \text{ m/s}^2 \times (-2 \text{ s})^2$$

$$x_0 = -44 \text{ m}$$

Ceci montre bien que  $v_0$  n'est pas spécifiquement la vitesse initiale. De façon correcte, c'est la vitesse à  $t = 0$ . Comme c'est possible qu'il y ait du mouvement avant  $t = 0$  (qui est arbitraire),  $v_0$  n'est donc pas toujours la vitesse initiale. De la même façon,  $x_0$  n'est pas nécessairement la position initiale, mais la position à  $t = 0$ .

Évidemment, si le mouvement commence à  $t = 0$ ,  $x_0$  et  $v_0$  sont alors les position et vitesse initiales.

## Que faire si l'accélération change?

Même si l'accélération change, il est possible de résoudre le problème avec les équations pour une accélération constante! En fait, c'est possible si l'accélération change par coup, c'est-à-dire qu'elle est constante pour un certain temps puis elle change soudainement pour une autre valeur constante qu'elle gardera pour un certain temps. Il peut y avoir autant de changement qu'on veut.

Dans ce cas, on fait le problème par partie. La première partie est le mouvement avec l'accélération constante qu'il y a au départ, la deuxième partie est celle avec la deuxième accélération constante et ainsi de suite... Les valeurs de position et de vitesse à la fin de la première partie deviennent alors les valeurs initiales de la deuxième partie. En appliquant les équations du MRUA dans chacune des parties, on respecte les conditions d'application de ces formules puisque l'accélération est bel et bien constante pour chacune des parties.

**Exemple 1.6.3**

Une voiture initialement au repos a une accélération de  $6 \text{ m/s}^2$  durant 5 secondes puis une accélération de  $2 \text{ m/s}^2$  durant 4 secondes et finalement une accélération de  $-15 \text{ m/s}^2$  durant 2 secondes. Quel est le déplacement de la voiture durant ces 11 secondes et quelle est la vitesse de la voiture à la fin de ce mouvement?

1<sup>re</sup> partie  $a = 6 \text{ m/s}^2$ ,  $x_0 = 0 \text{ m}$  et  $v_0 = 0 \text{ m/s}$

La vitesse à la fin de cette partie est

$$v = v_0 + at = 0 + 6 \text{ m/s}^2 \times 5 \text{ s} = 30 \text{ m/s}$$

La position à la fin de cette partie est

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 0 + 0 \times 5 \text{ s} + \frac{1}{2} 6 \text{ m/s}^2 \times (5 \text{ s})^2 = 75 \text{ m}$$

2<sup>e</sup> partie  $a = 2 \text{ m/s}^2$ ,  $x_0 = 75 \text{ m}$  et  $v_0 = 30 \text{ m/s}$

La vitesse à la fin de cette partie est

$$v = v_0 + at = 30 \text{ m/s} + 2 \text{ m/s}^2 \times 4 \text{ s} = 38 \text{ m/s}$$

La position à la fin de cette partie est

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 75 \text{ m} + 30 \text{ m/s} \times 4 \text{ s} + \frac{1}{2} 2 \text{ m/s}^2 \times (4 \text{ s})^2 = 211 \text{ m}$$

3<sup>e</sup> partie  $a = -15 \text{ m/s}^2$ ,  $x_0 = 211 \text{ m}$  et  $v_0 = 38 \text{ m/s}$

La vitesse à la fin de cette partie est

$$v = v_0 + at = 38 \text{ m/s} + (-15 \text{ m/s}^2) \times 2 \text{ s} = 8 \text{ m/s}$$

La position à la fin de cette partie est

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 211 \text{ m} + 38 \text{ m/s} \times 2 \text{ s} + \frac{1}{2} (-15 \text{ m/s}^2) \times (2 \text{ s})^2 = 257 \text{ m}$$

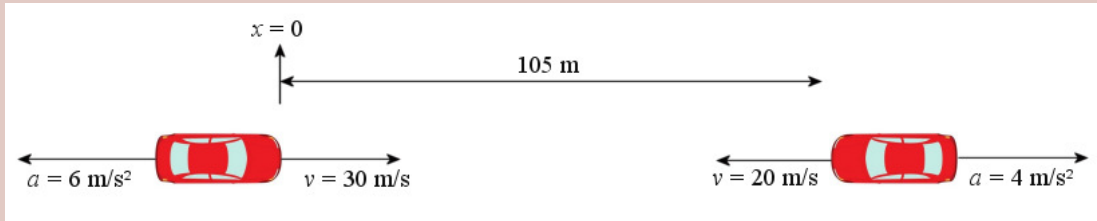
Le déplacement total est donc de  $\Delta x = x_2 - x_1 = 257 \text{ m} - 0 \text{ m} = 257 \text{ m}$  et la vitesse finale est de  $8 \text{ m/s}$ .

**Quand deux objets vont-ils être à la même place?**

On demande souvent dans les problèmes de cinématique quand deux objets vont-ils être à la même position en demandant quand vont-ils entrer en collision ou quand un objet A va rattraper un objet B. Le truc est bien simple, vous n'avez qu'à poser l'équation  $x_A = x_B$  et résoudre. Un exemple vous aidera à mieux comprendre.

**Exemple 1.6.4**

Deux voitures se dirigent l'une vers l'autre. La voiture de gauche se dirige vers la droite avec une vitesse de 30 m/s et la voiture de droite va vers la gauche avec une vitesse de 20 m/s. Lorsqu'elles sont à 105 m l'une de l'autre, elles commencent à freiner simultanément. La voiture de gauche freine à 6 m/s<sup>2</sup> alors que la voiture de droite freine à 4 m/s<sup>2</sup>. Vont-elles se frapper et si oui, où et quand?



Il y aura collision si  $x_A = x_B$ .

Pour la voiture A (celle de gauche) on a  $x_0 = 0 \text{ m}$  et  $v_0 = 30 \text{ m/s}$   $a = -6 \text{ m/s}^2$ . Sa position en fonction du temps est donc

$$x_A = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x_A = 30 \text{ m/s} \times t + \frac{1}{2} (-6 \text{ m/s}^2) \times t^2$$

$$x_A = 30 \text{ m/s} \times t - 3 \text{ m/s}^2 \times t^2$$

Pour la voiture B (celle de droite) on a  $x_0 = 105 \text{ m}$  et  $v_0 = -20 \text{ m/s}$   $a = 4 \text{ m/s}^2$ . Sa position en fonction du temps est donc

$$x_B = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x_B = 105 + -20 \text{ m/s} \times t + \frac{1}{2} (4 \text{ m/s}^2) \times t^2$$

$$x_B = 105 - 20 \text{ m/s} \times t + 2 \text{ m/s}^2 \times t^2$$

Si on égalise les deux positions, on a

$$x_A = x_B$$

$$30 \text{ m/s} \times t - 3 \text{ m/s}^2 \times t^2 = 105 \text{ m} - 20 \text{ m/s} \times t + 2 \text{ m/s}^2 \times t^2$$

$$105 \text{ m} - 50 \text{ m/s} \times t + 5 \text{ m/s}^2 \times t^2 = 0$$

On peut alors résoudre cette équation quadratique pour obtenir

$$t = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \times 5 \times 105}}{10} = \frac{50 \pm 20}{10}$$

Les deux solutions sont donc  $t = 3\text{ s}$  et  $t = 7\text{ s}$ .

Puisqu'il y a une solution, cela signifie qu'il y aura une collision. S'il n'y avait pas eu de solution, ce qui arrive parfois avec les équations quadratiques, cela signifie qu'il n'y a pas de collision.

Mais alors, pourquoi 2 solutions? Est-ce que les autos vont se frapper deux fois? En réalité, elles vont se frapper uniquement à  $t = 3\text{ s}$ . La deuxième solution n'est pas valide parce que lors de la collision, il est clair que l'accélération des autos va changer. Ainsi, les formules de la position en fonction du temps que l'on a faites précédemment ne sont pas bonnes pour  $t > 3\text{ s}$  puisque l'accélération a changé.

On peut ensuite trouver où vont se frapper les autos en prenant une des deux formules de la position. Cette position est

$$x_A = 30\text{ m/s} \times 3\text{ s} - 3\text{ m/s}^2 \times (3\text{ s})^2 = 63\text{ m}$$

(Vous pouvez vérifier que  $x_B$  donne la même valeur)

On peut même trouver la vitesse des deux voitures lors de la collision

$$v_A = v_0 + at = 30\text{ m/s} + (-6\text{ m/s}^2) \times 3\text{ s} = 12\text{ m/s}$$

$$v_B = v_0 + at = -20\text{ m/s} + 4\text{ m/s}^2 \times 3\text{ s} = -8\text{ m/s}$$

## Exemple 1.6.5

Deux voitures initialement au repos à la ligne de départ font la course. La voiture A a une accélération de  $5\text{ m/s}^2$  jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse maximale de  $30\text{ m/s}$ . La voiture B a une accélération de  $3\text{ m/s}^2$  jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse maximale de  $42\text{ m/s}$ . Où et quand la voiture B va-t-elle rattraper la voiture A?

Comme les accélérations changent dans ce problème, il faut séparer ce problème en partie

1<sup>re</sup> partie : Les deux accélèrent

$$a_A = 5\text{ m/s}^2, a_B = 3\text{ m/s}^2$$

Comme cette partie se termine quand la voiture A a atteint sa vitesse maximale, alors cette phase dure

$$v_A = v_0 + at$$

$$30\text{ m/s} = 0\text{ m/s} + 5\text{ m/s}^2 \times t$$

$$t = 6\text{ s}$$

À la fin de cette partie, les positions des voitures sont

$$x_A = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} 5\text{ m/s}^2 \times (6\text{ s})^2 = 90\text{ m}$$

$$x_B = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} 3 \text{ m/s}^2 \times (6 \text{ s})^2 = 54 \text{ m}$$

Et les vitesses sont

$$v_A = 30 \text{ m/s}$$

$$v_B = v_0 + a t = 0 + 3 \text{ m/s}^2 \times 6 \text{ s} = 18 \text{ m/s}$$

2<sup>e</sup> partie : La voiture A a sa vitesse maximale, la voiture B continue d'accélérer.  
 $a_A = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $a_B = 3 \text{ m/s}^2$

(Remarquez bien : les valeurs initiales des positions et des vitesses sont les valeurs à la fin de la première partie)

Comme cette partie se termine quand la voiture B a atteint sa vitesse maximale, alors cette phase dure

$$v_B = v_0 + a t$$

$$42 \text{ m/s} = 18 \text{ m/s} + 3 \text{ m/s}^2 \times t$$

$$t = 8 \text{ s}$$

À la fin de cette partie, les positions des voitures sont

$$x_A = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 90 \text{ m} + 30 \text{ m/s} \times 8 \text{ s} + 0 = 330 \text{ m}$$

$$x_B = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 54 \text{ m} + 18 \text{ m/s} \times 8 \text{ s} + \frac{1}{2} 3 \text{ m/s}^2 \times (8 \text{ s})^2 = 294 \text{ m}$$

(La voiture B n'a toujours pas rattrapé la voiture A. Si on se rendait compte qu'elle l'aurait dépassée, on procéderait de la même façon qu'on fera à la troisième partie pour trouver exactement où et quand elle l'aurait dépassée)

Les vitesses à la fin de la deuxième partie sont

$$v_A = 30 \text{ m/s}$$

$$v_B = 42 \text{ m/s}$$

3<sup>e</sup> partie : Les deux voitures ont atteint leurs vitesses maximales.  
 $a_1 = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $a_2 = 0 \text{ m/s}^2$

Cette partie ne se termine jamais. Comme la voiture 2 va plus vite que la voiture 1, c'est certain qu'elle va la rattraper. Lorsque cela arrive, on a alors  $x_A = x_B$ .

Les positions en fonction du temps des voitures sont

$$x_A = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 330 \text{ m} + 30 \text{ m/s} \times t + 0$$

$$x_B = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 294 \text{ m} + 42 \text{ m/s} \times t + 0$$

Si on égale les deux positions on a alors

$$330 \text{ m} + 30 \text{ m/s} \times t = 294 \text{ m} + 42 \text{ m/s} \times t$$

$$36 \text{ m} = 12 \text{ m/s} \times t$$

$$t = 3 \text{ s}$$

La position est alors

$$x_A = 330m + 30m/s \times 3s = 420m \quad (x_B \text{ aurait donné la même réponse)}$$

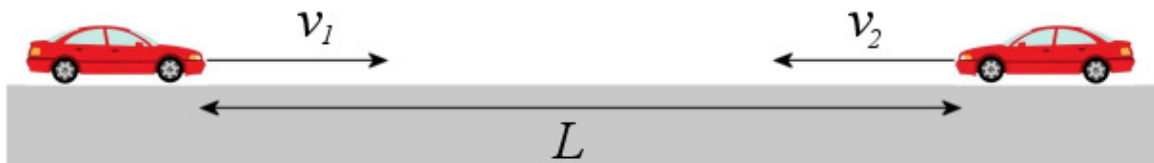
et le temps total depuis le début est  $6s + 8s + 3s = 17s$

(Remarquez bien : on doit additionner les temps puisque celui-ci repart à zéro à chaque partie. Cependant, on obtient directement la position puisqu'on a gardé toujours notre  $x = 0$  à la même place, c'est-à-dire à la ligne de départ)

## Deux petites formules utiles

Les deux formules suivantes sont souvent utiles puisqu'elles font référence à des situations relativement simples qui vont se présenter souvent dans les cours de physique.

Si deux objets se dirigent l'un vers l'autre à vitesse constante et sont initialement à une distance  $L$ , combien faudra-t-il de temps pour qu'ils se rencontrent?



La position de l'objet 1 est

$$x_1 = 0 + v_1 t$$

(On a placé le  $x = 0$  à la position initiale de la voiture 1.) La position de la voiture 2 est

$$x_2 = L - v_2 t$$

Quand ils vont se rencontrer, ils seront à la même position. On a donc

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ v_1 t &= L - v_2 t \\ (v_1 + v_2) t &= L \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

**Temps de rencontre pour deux objets distants de  $L$  allant à vitesse constante.**

$$t = \frac{L}{v_1 + v_2}$$

Si l'objet poursuit l'objet 2 et sont initialement à une distance  $L$ , combien faudra-t-il de temps pour que l'objet 1 rattrape l'objet 2? Évidemment, l'objet 1 va plus vite.



La position de l'objet 1 est

$$x_1 = 0 + v_1 t$$

(On a encore placé le  $x = 0$  à la position initiale de la voiture 1.) La position de la voiture 2 est

$$x_2 = L + v_2 t$$

Quand ils vont se rencontrer, ils seront à la même position. On a donc

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ v_1 t &= L + v_2 t \\ (v_1 - v_2) t &= L \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

**Temps pour que l'objet 1 rattrape l'objet 2 s'ils sont distants de  $L$  et vont à vitesse constante.**

$$t = \frac{L}{v_1 - v_2} = \frac{L}{\Delta v}$$

On voit qu'il y a seulement une solution si la vitesse de l'objet qui poursuit est plus grande que l'objet poursuivi, ce qui semble logique.

## Obtenir les équations du mouvement à partir de positions à certains moments

Il arrive qu'on demande où sera un objet à un certain moment en ne donnant que la position de l'objet à 3 autres moments. L'exemple suivant vous montrera comment résoudre ce genre de problème.

**Exemple 1.6.6**

Voici la position d'un objet à trois instants

$$x = 2 \text{ m à } t = 1 \text{ s}$$

$$x = 3 \text{ m à } t = 2 \text{ s}$$

$$x = 11 \text{ m à } t = 4 \text{ s}$$

Où sera-t-il à  $t = 10 \text{ s}$ ?

Comme l'équation du mouvement est

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

On doit avoir

$$2 = x_0 + v_0 + \frac{1}{2} a$$

$$3 = x_0 + 2v_0 + 2a$$

$$11 = x_0 + 4v_0 + 8a$$

Ce qui nous donne trois équations avec trois inconnus. On peut résoudre de la façon qu'on veut (Gauss-Jordan par exemple...) Laissons de côté ici les détails de cette manipulation mathématique. On obtient alors

$$x_0 = 3 \text{ m}, \quad v_0 = -2 \text{ m/s} \text{ et } a = 2 \text{ m/s}^2$$

La position à  $t = 10 \text{ s}$  est donc

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 3\text{m} - 2\text{m/s} \times 10\text{s} + \frac{1}{2} 2\text{m/s}^2 \times (10\text{s})^2 = 83\text{m}$$

Ça semble court comme solution, mais c'est assez long en fait quand on doit résoudre les trois équations.

**1.7 La chute libre****L'accélération gravitationnelle**

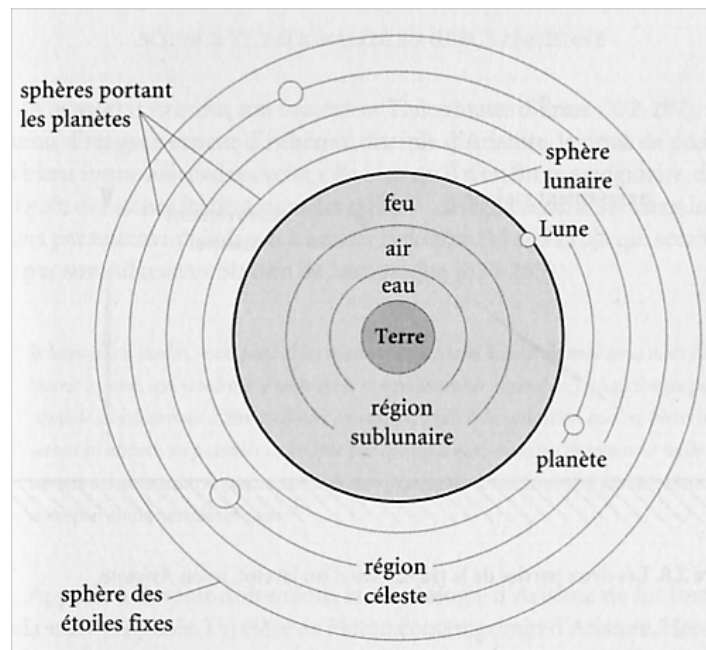
Le mouvement de chute libre est un mouvement à accélération constante. En chute libre, tous les objets tombent avec une accélération de  $9,8 \text{ m/s}^2$  vers le bas. On utilise le symbole  $g$  pour représenter cette accélération.

$$a_{\text{gravitationnelle}} = g = 9,8 \text{ m/s}^2 \text{ vers le bas}$$

## Comment a-t-on découvert que la chute des corps se fait à accélération constante?

Cette information, bien que toute simple, est le résultat de beaucoup d'efforts. En effet, il fallut environ 2000 ans d'étude pour arriver à cette conclusion.

C'est Aristote (4<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) qui fit la plus importante théorie sur la chute des corps de l'Antiquité. Dans cette théorie, les quatre éléments des Grecs ont chacun une place naturelle dans l'univers. En partant du centre de l'univers, on retrouve la terre, puis l'eau, puis l'air et finalement le feu.



Il commence par expliquer pourquoi une pierre retombe au sol quand on la soulève dans l'air ou dans l'eau : la pierre, principalement composée de l'élément terre, tombe pour retourner à sa place naturelle. De la même façon, le feu monte pour retourner à sa place naturelle, qui est au-dessus de l'air. Aristote affirme également que les objets tombent avec une vitesse proportionnelle au poids du corps. Ainsi, si on laisse tomber un objet 4 fois plus lourd qu'un autre en les lâchant en même temps, l'objet plus léger prendra 4 fois plus de temps à arriver au sol que le plus lourd. Tout cela semble bien logique puisque bien des gens vous diront que les objets plus lourds tombent plus vite que les objets légers.

De toute évidence, Aristote n'a pas fait beaucoup d'expérience pour arriver à cette conclusion puisqu'on peut vérifier assez aisément que les objets plus lourds ne tombent pas plus vite que les objets plus légers. Il suffit de faire un test en laissant tomber simultanément une pièce de dix cents et une pièce de 2 dollars. Malgré une différence de poids assez importante (la pièce de 2\$ est environ 4 fois plus lourde que la pièce de 10¢), elles vont frapper le sol en même temps. Le vidéo suivant montre également qu'il n'y a

pas de différence entre les temps d'arrivée de deux objets de masse assez différente (une balle de golf et une boule de quille) quand on les laisse tomber.

<http://www.youtube.com/watch?v=Z789eth4IFU>

D'ailleurs, plusieurs ont montré qu'Aristote avait tort, et ce, dès l'Antiquité. En commençant par Hipparque au 2<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ jusqu'à Simon Stévin en 1586, plusieurs ont montré que la vitesse de chute n'était pas proportionnelle au poids. Nous avons même un commentaire de Philopon datant du 6<sup>e</sup> siècle qui affirme très clairement qu'il n'y a pratiquement pas de différence entre les temps d'arrivée quand on laisse tomber deux objets de masse différente.

Pourtant, il est vrai à l'occasion que les objets plus lourds vont tomber plus vite, mais c'est à cause de la résistance de l'air qui agit de façon différente sur chaque objet. Vous pouvez admirer les effets de la friction de l'air dans ce vidéo.

[http://www.youtube.com/watch?v=AYz\\_K3mwq6A](http://www.youtube.com/watch?v=AYz_K3mwq6A)

Par contre, si on élimine l'air, cette différence disparaît. On peut voir cela sur ce vidéo où on laisse tomber une plume et une pièce de monnaie dans un tube où on a fait le vide.

<http://www.youtube.com/watch?v=ndFXXasM6ZE>

On peut voir une autre démonstration de ce phénomène dans le vide puisque les astronautes d'Apollo 15 ont fait cette expérience sur la Lune, où il n'y a pas d'air. Par contre, la force de gravité étant plus faible à la surface de la Lune, l'accélération des objets n'est que de  $1,6 \text{ m/s}^2$ .

<http://www.youtube.com/watch?v=PE81zGhnb0w>

Même si plusieurs savaient qu'Aristote avait tort, cela ne veut pas dire qu'on savait comment se faisait la chute des corps. Bien que les lois du mouvement à accélération constante fussent connues depuis les années 1300, personne ne pensa que la chute libre pouvait être un mouvement de ce type avant presque trois siècles. Albert de Saxe était en bonne partie responsable de cela. Il était arrivé, au 14<sup>e</sup> siècle, à la conclusion que le mouvement de chute libre n'était pas un mouvement à accélération constante, mais quelque chose d'un peu différent. Selon le raisonnement d'Albert, voici ce qu'on aurait comme déplacement d'un objet en chute libre. (Pour simplifier les calculs, prenons une accélération de 10 plutôt que 9,8. De plus, nous ferons ce raisonnement avec des mètres et des secondes, ce qui n'était pas le cas pour Albert).

À la première seconde, l'objet a une vitesse de 10 m/s puisque l'accélération est de  $10 \text{ m/s}^2$ . En une seconde, l'objet parcourt donc 10 m. À la deuxième seconde, la vitesse de l'objet est de 20 m/s. Il parcourt donc 20 m durant cette seconde, pour un total de 30 m si on ajoute la distance parcourue durant la première seconde. À la troisième seconde,

l'objet va à 30 m/s et va donc parcourir 30 m durant cette seconde. Cela fait une distance totale de 60 m si on ajoute les 30 m parcourus durant les deux premières secondes. En poursuivant ce raisonnement, les distances parcourues en fonction du temps sont : 10, 30, 60, 100, 150, 210 ... (qui est la suite des nombres triangulaires multipliée par 10)

**Résumé du raisonnement d'Albert de Saxe (14<sup>e</sup> siècle) pour la chute des corps. Ce raisonnement, de loin le plus populaire durant près de 300 ans, n'est pas correct**

Temps	vitesse	Déplacement durant cette seconde	Déplacement total depuis le début
Première seconde	10 m/s	10 m	10 m
Deuxième seconde	20 m/s	20 m	30 m
Troisième seconde	30 m/s	30 m	60 m
Quatrième seconde	40 m/s	40 m	100 m
Cinquième seconde	50 m/s	50 m	150 m
Sixième seconde	60 m/s	60 m	210 m

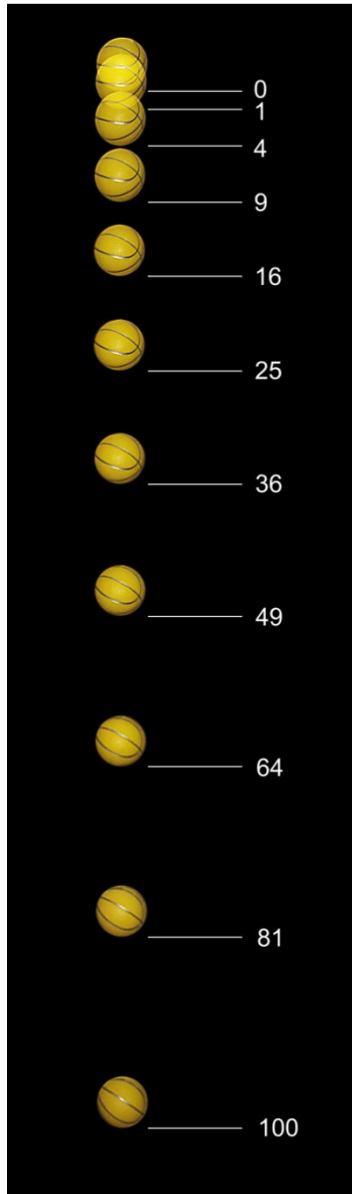
Ce raisonnement semble bien bon, tellement que presque tous l'acceptèrent durant près de 300 ans. Toutefois, il ne donne pas les mêmes déplacements que ce que prévoit un mouvement à accélération constante. En effet, si l'accélération est de 10 m/s<sup>2</sup>, les positions en fonction du temps, données par la formule  $\frac{1}{2}at^2$  sont, 5, 20, 45, 80, 125, 180, ..., toujours un peu en deçà de ce que donne le raisonnement d'Albert de Saxe. Cette différence entre les deux mouvements explique pourquoi on n'associait jamais la chute libre à un mouvement à accélération constante avant 1600.

Les premières véritables expériences sur la chute des corps sont faites par Galilée. Galilée n'acceptait pas le raisonnement d'Albert de Saxe, mais on sait qu'en 1584, Galilée pensait que la vitesse d'un corps en chute libre était proportionnelle à la distance parcourue (ce qui est faux puisque la vitesse est proportionnelle à  $\sqrt{\text{distance}}$  pour un MRUA). Il lui faudra bien du temps à se départir de cette idée préconçue. En 1603-1604, il commence ses études sur la chute des corps. Comme celle-ci se fait trop rapidement, il fait descendre les corps sur des plans inclinés pour ralentir le mouvement. Comme il n'y a pas de façon simple pour mesurer le temps à cette époque, il place des cordes tendues sur le plan incliné le long de la trajectoire. Quand l'objet qui descend sur le plan incliné passe sur une corde, il y a un bruit. Galilée ajuste alors la position des cordes pour que les bruits se fassent à intervalle régulier, ce dont il s'assure en chantant une marche militaire durant l'expérience. Il peut alors observer que la distance parcourue par l'objet initialement au repos qui descend suit la loi

$$\text{distance} \propto t^2$$

Galilée venait de montrer qu'Albert de Saxe avait tort et que la chute des corps se fait avec une accélération constante puisque nous avons  $\text{distance} = \frac{1}{2}at^2$  pour ce type de mouvement. Il mesura également les temps de chute en mesurant la quantité d'eau qui s'écoule durant la chute. Ces mesures confirment les résultats obtenus avec les expériences sur le plan incliné. Pendant longtemps, on a cru que Galilée n'avait pas vraiment fait ces expériences, mais une étude de ses notes montre qu'il les a bel et bien faites. Il faudra attendre 1650 environ pour que les résultats des travaux de Galilée soient bien acceptés par la communauté scientifique.

Aujourd'hui, on dispose de meilleurs moyens pour démontrer cette loi. On peut, par exemple, utiliser un stroboscope pour photographier un objet à intervalle régulier pour ainsi facilement mesurer les positions et observer que le mouvement se fait selon les lois de mouvement à accélération constante avec une accélération de  $9,8 \text{ m/s}^2$ .



On associe souvent à cette découverte l'expérience que Galilée aurait faite du haut de la tour de Pise, dans laquelle il lâcha deux objets de masse différente pour montrer qu'ils arrivent au sol en même temps. Il n'est toutefois pas certain que Galilée ait vraiment exécuté cette expérience. Même si c'est le cas, il aurait été devancé par Simon Stevin en 1586 qui fit cette expérience aux Pays-Bas. De toute façon, cette expérience montre uniquement que la chute se fait à la même vitesse peu importe la masse et ne permettait

pas de découvrir, avec les moyens de l'époque, que la distance parcourue augmente avec le carré de la distance et donc que l'accélération est constante.

En terminant, voici une petite démonstration qu'utilisa Galilée pour montrer que les objets plus lourds ne peuvent pas tomber plus vite que les objets plus légers. Si on suppose que les objets lourds tombent plus vite que les objets plus légers, que se passera-t-il si on attache ensemble un objet de 10 kg à un objet de 1 kg. Un premier raisonnement nous amène à penser que cet objet de 11 kg tombera plus vite que l'objet de 10 kg, puisqu'il est plus lourd. Cependant, un autre raisonnement nous amène à penser que cet objet de 11 kg va tomber moins vite que l'objet de 10 kg puisqu'il s'agit d'un objet de 10 kg dont le mouvement est ralenti par un objet de 1 kg qui tombe moins vite! On n'a pas cette difficulté logique si la vitesse des corps en chute libre est la même pour les deux objets.

## Exemples pour la chute libre

La plupart du temps, on trouve assez rapidement la solution aux problèmes de chute libre en utilisant une équation pour le MRUA avec une accélération de  $9,8 \text{ m/s}^2$ .



### Erreur fréquente : $g = -9.8 \text{ m/s}^2$

Quand vous voyez  $g$  dans une formule, il faut remplacer  $g$  par  $9,8 \text{ m/s}^2$  et non pas par  $-9,8 \text{ m/s}^2$ . Le signe ne fait pas partie de  $g$ . Ainsi, si votre axe positif est vers le haut, l'accélération sera de  $-g$ .



### Erreur fréquente : mauvais signe pour $a$

L'accélération est toujours vers le bas pour la chute libre. On remarque que certains étudiants pensent que l'accélération est vers le haut quand l'objet monte et vers le bas quand l'objet descend. C'est faux. En montant, la vitesse est vers le haut et l'accélération est vers le bas. Comme la vitesse et l'accélération sont dans des directions opposées, l'objet ralentit. En descendant, la vitesse et l'accélération sont toutes les deux vers le bas. La vitesse augmente alors puisque c'est ce qui arrive quand l'accélération est dans le même sens que la vitesse.

## Exemple 1.7.1

On lance un objet vers le haut avec une vitesse de  $20 \text{ m/s}$  à partir du sol.

a) jusqu'à quelle hauteur va-t-il monter?

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser un axe dirigé vers le haut et dont le  $y = 0$  est au sol.

Nous avons donc  $a = -9,8 \text{ m/s}^2$  (négatif, car on a choisi un axe est vers le haut et l'accélération est vers le bas),  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  et  $y_0 = 0 \text{ m}$ . On atteint la hauteur maximale quand la vitesse est nulle (L'objet monte quand la vitesse est positive et descend quand la vitesse est négative. On a donc la hauteur maximale quand  $v = 0$ ). On cherche donc  $y$  quand  $v = 0$ . On résout directement ce problème avec l'équation

$$\begin{aligned}2a(y - y_0) &= v^2 - v_0^2 \\2(-9,8 \text{ m/s}^2)(y - 0 \text{ m}) &= 0 - (20 \text{ m/s})^2 \\y &= 20,4 \text{ m}\end{aligned}$$

b) Combien faut-il de temps pour atteindre cette hauteur maximale?

On résout directement ce problème avec l'équation

$$\begin{aligned}v &= v_0 + at \\0 &= 20 \text{ m/s} + (-9,8 \text{ m/s}^2)t^2 \\t &= 2,04 \text{ s}\end{aligned}$$

c) Quelle est la vitesse de l'objet quand il va revenir au sol?

Quand l'objet revient au sol, il revient à  $y = 0$ . On peut donc résoudre directement ce problème avec l'équation

$$\begin{aligned}2a(y - y_0) &= v^2 - v_0^2 \\2(-9,8 \text{ m/s}^2)(0 \text{ m} - 0 \text{ m}) &= v^2 - (20 \text{ m/s})^2 \\y &= \pm 20 \text{ m/s}\end{aligned}$$

On note souvent une tendance à faire ce problème en deux parties, la montée et la descente. Bien que ce ne soit pas mauvais de faire cette séparation, elle est inutile puisqu'on peut faire ce calcul directement puisque l'accélération est toujours constante dans ce mouvement. Souvenez-vous : la séparation est nécessaire seulement si l'accélération change.

d) Quel est le déplacement entre 1 s et 1,5 s après le départ de l'objet?

Pour résoudre ce problème, calculons les positions à  $t = 1$  et  $t = 1,5 \text{ s}$

À  $t = 1 \text{ s}$  on a

$$\begin{aligned}y &= y_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \\y &= 0 \text{ m} + 20 \text{ m/s} \times 1 \text{ s} + \frac{1}{2}(-9,8 \text{ m/s}^2)(1 \text{ s})^2 \\y &= 15,1 \text{ m}\end{aligned}$$

À  $t = 1,5 \text{ s}$  on a

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$y = 0m + 20m/s \times 1,5s + \frac{1}{2} (-9,8m/s^2)(1,5s)^2$$

$$y = 18,98m$$

Le déplacement est donc

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ &= 18,98m - 15,1m \\ &= 3,88m \end{aligned}$$

e) Au bout de combien de temps l'objet sera-t-il à 10 m du sol?

On peut résoudre directement à l'aide de

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$10m = 0m + 20m/s \times t + \frac{1}{2} (-9,8m/s^2) t^2$$

$$t = 0,583s \quad \text{et} \quad 3,498s \quad (\text{solutions d'une équation quadratique})$$

Il y a deux réponses et ces deux réponses sont bonnes puisque l'objet est à 10 m de sol une fois en montant et une autre fois quand il redescend.

La plupart des problèmes sont comme celui-ci : une des équations du MRUA va résoudre directement le problème. Il existe cependant quelques problèmes où cela ne fonctionnera pas. En voici un

### Exemple 1.7.2

Une pierre lancée verticalement à partir du haut du toit d'un édifice passe devant une fenêtre de 1,5 m de haut en 0,1 s. Le haut de la fenêtre est à 10 m du toit. À quelle vitesse la pierre a-t-elle été lancée?

Il manque d'information pour résoudre ce problème directement. Mais, puisqu'on a une information concernant le passage devant une fenêtre, il peut être intéressant de séparer ce problème en deux parties.

- 1) Du toit jusqu'au haut de la fenêtre
- 2) Du haut de la fenêtre jusqu'au bas de la fenêtre.

Nous allons commencer par la deuxième partie. Nous allons travailler avec un axe des  $y$  dirigé vers le bas et dont le  $y = 0$  est situé au toit. Pour cette partie, nous connaissons

L'accélération ( $a = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Elle est positive, car l'axe des  $y$  est vers le bas)  
 La position initiale ( $y_0 = 10 \text{ m}$ )  
 La position finale ( $y = 11,5 \text{ m}$ )  
 Le temps pour ce déplacement ( $0,1 \text{ s}$ )

Cela nous permet donc de trouver la vitesse initiale de cette partie, c'est-à-dire la vitesse de la pierre quand elle est vis-à-vis du haut de la fenêtre. On trouve cette vitesse avec l'équation

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$11,5 = 10 \text{ m} + v_0 \times 0,1 \text{ s} + \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) (0,1 \text{ s})^2$$

$$v_0 = 14,51 \text{ m/s}$$

On peut ensuite se concentrer sur la première partie du mouvement. Pour cette partie nous connaissons

L'accélération ( $a = 9,8 \text{ m/s}^2$ )  
 La position initiale ( $y_0 = 0 \text{ m}$ )  
 La position finale ( $y = 10 \text{ m}$ )  
 La vitesse finale ( $29,755 \text{ m/s}$ )

On peut alors trouver la vitesse initiale avec

$$2a(y - y_0) = v^2 - v_0^2$$

$$2(9,8 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m} - 0 \text{ m}) = (14,51 \text{ m/s})^2 - v_0^2$$

$$v_0 = \pm 3,813 \text{ m/s}$$

La pierre a donc été lancée avec une vitesse de  $3,813 \text{ m/s}$  vers le haut ou vers le bas. Les deux réponses sont bonnes parce que si vous lancez la pierre vers le haut à  $3,813 \text{ m/s}$ , elle va revenir à la hauteur du toit avec la même vitesse, mais dirigée vers le bas ce qui donne le même résultat que si on l'avait lancée directement vers le bas à  $3,813 \text{ m/s}$ .

## 1.8 Le mouvement à accélération non constante

Que faire maintenant si l'accélération n'est pas constante? Dans ce cas, il faut oublier les équations du MRUA et il faut retourner à la base. Il faut retourner à nos définitions de base de la vitesse et de l'accélération.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

On a vu qu'à partir de ces définitions, on peut trouver la vitesse d'un objet si on connaît la formule de la position en fonction du temps. Il suffit de dériver la formule de la position pour y arriver. Mais que faire si on veut faire le contraire, c'est-à-dire trouver la position si on connaît la formule de la vitesse? Dans le fond, quand on y pense bien, on n'a qu'à faire le contraire de la dérivée!

### Exemple 1.8.1

La vitesse d'un objet est donnée par  $v = 9t^2$ . À quelle position est l'objet à  $t = 5$  s si est à  $x = 0$  quand  $t = 0$  ?

Puisque la vitesse est la dérivée de la position, cela signifie que  $9t^2$  est la dérivée de la position. On doit donc trouver quelle fonction il aurait fallu dériver pour obtenir  $9t^2$ . Cette fonction est  $3t^3$  (dérivez-la et vous allez voir qu'on obtient  $9t^2$ ). En fait, ce n'est pas la seule solution parce que  $3t^3+3$  donnerait également la même dérivée. La solution la plus générale est

$$x = 3t^3 + \text{constante}$$

Peu importe la valeur de la constante, on obtient toujours  $9t^2$  comme dérivée.

Que faire alors de cette constante inconnue? Il sera possible de la trouver puisqu'on donnera une information supplémentaire, c'est-à-dire la position à un certain moment. On appelle ces données les conditions initiales. Ici, on dit que l'objet est à  $x = 0$  quand  $t = 0$ . Si on met ces valeurs dans notre solution on a

$$x = 3t^3 + \text{constante}$$

$$0 = 3 \times 0^3 + \text{constante}$$

$$0 = 0 + \text{constante}$$

$$\text{constante} = 0$$

On a donc la formule suivante pour la position

$$x = 3t^3$$

à  $t = 5$ s, l'objet est donc à la position  $x = 375$  m

De façon un peu plus formelle, faire le contraire de la dérivée s'appelle faire l'intégrale. Donc  $3t^3 + \text{constante}$  est l'intégrale de  $9t^2$ . La notation correcte de cette procédure est

$$\int 9t^2 dt = 3t^3 + \text{constante}$$

Ça semble un peu lourd, mais vous comprendrez pourquoi on a cette notation dans le cours de calcul intégral. Vous pourrez voir aussi que faire l'intégrale d'une fonction est généralement plus difficile que de trouver la dérivée d'une fonction. Dérive qui veut, intègre qui peut, dit-on.

Ainsi, on peut donc généraliser cette façon de faire avec les équations

### Position à partir de la formule de la vitesse

$$x = \int v dt$$

### Vitesse à partir de la formule de l'accélération

$$v = \int a dt$$

### Exemple 1.8.2

L'accélération d'un objet est donnée par  $a = 2\sin(t)$ . Quelle est la vitesse de l'objet à  $t = 1$  s si sa vitesse est de 0 m/s quand  $t = 0$  ?

Puisque l'accélération est la dérivée de la vitesse, cela signifie que  $2\sin(t)$  est la dérivée de la vitesse. On doit donc trouver quelle fonction il aurait fallu dériver pour obtenir  $2\sin(t)$ . On a donc

$$\begin{aligned} v &= \int a dt \\ v &= \int 2\sin t dt \\ v &= -2\cos t + C \end{aligned}$$

où on a noté la constante  $C$ . On trouve cette constante en sachant que la vitesse est 0 m/s à  $t = 0$  s. On a alors

$$\begin{aligned} v &= -2\cos t + C \\ 0 &= -2\cos(0) + C \\ 0 &= -2 + C \\ C &= 2 \end{aligned}$$

La vitesse est donc donnée par la formule

$$v = -2\cos t + 2$$

La vitesse à  $t = 1$  s est donc

$$v = -2 \cos 1 + 2$$

$$v = 0,9194 \text{ m/s}$$

(Notez qu'on a calculé avec l'angle en radian, ce qui sera habituellement le cas avec ce genre de fonction. On verra ça beaucoup plus loin)

## Calcul à partir du graphique

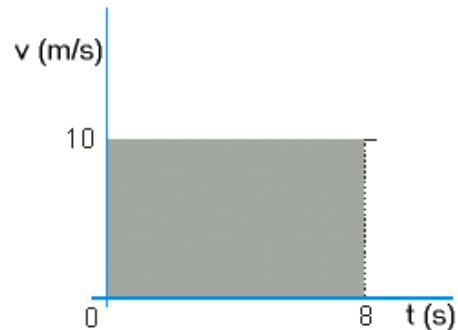
On peut également résoudre ce genre de problème de façon graphique. Pour comprendre, commençons par un cas simple : un objet qui se déplace à vitesse constante de 10 m/s. Dans ce cas, le déplacement en 8 secondes est

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = v \Delta t$$

$$\Delta x = 10 \text{ m/s} \times 8 \text{ s} = 80 \text{ m}$$

Or, sur le graphique de la vitesse en fonction du temps (à droite), on remarque que  $v \Delta t = 10 \times 8$  est l'aire sous la courbe de la vitesse. Cette conclusion est en fait très générale et reste correcte même si la vitesse n'est pas constante.



Aire sous la courbe de la vitesse = déplacement

De la même façon, on peut montrer que

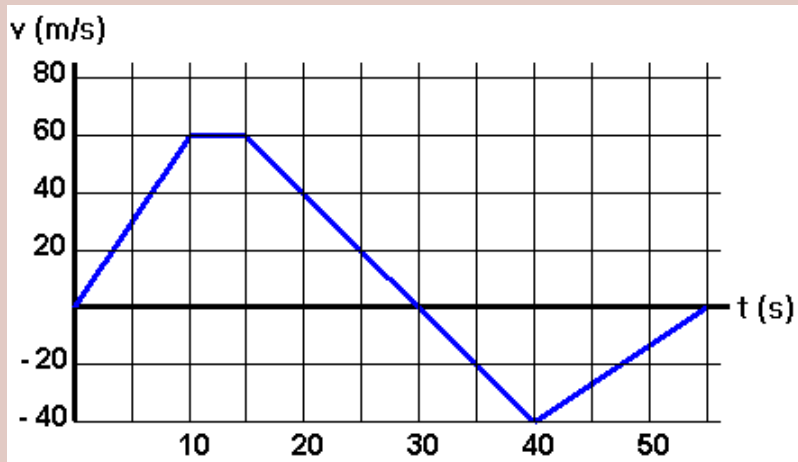
Aire sous la courbe de l'accélération = changement de vitesse

Attention : quand l'aire est sous l'axe du temps, elle a une valeur négative.

### Exemple 1.8.3

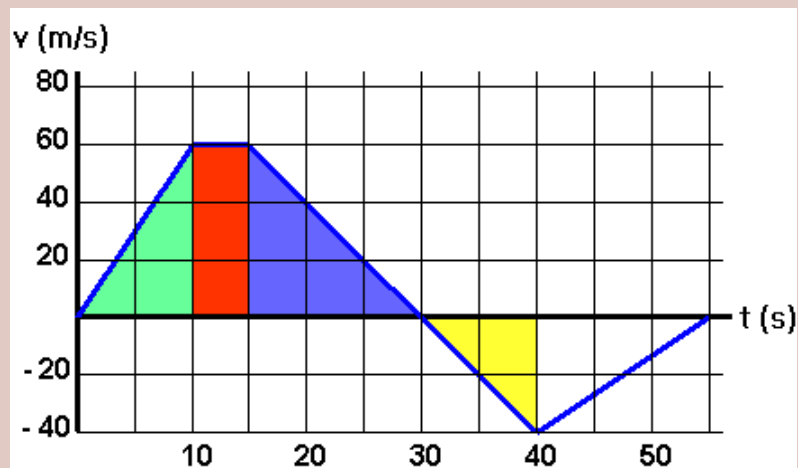
Voici le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet.

a) Quel est le déplacement entre  $t = 0$  et  $t = 40$  s ?



Pour trouver le déplacement, il faut calculer l'aire entre sous la courbe entre  $t = 0$  et  $t = 40$  s.

Séparons l'aire en plusieurs parties pour y arriver.



On a premièrement un triangle (en vert). L'aire est 300 m

On a ensuite un rectangle (en rouge). L'aire est 300 m

On a ensuite un triangle (en bleu). L'aire est 450 m

On a finalement un autre triangle (en jaune). L'aire est 200 m

(On arrête là puisqu'on demandait le déplacement entre 0 et **40 s**.)

Le déplacement total est donc  $300 \text{ m} + 300 \text{ m} + 450 \text{ m} - 200 \text{ m} = 850 \text{ m}$

On a compté le dernier comme étant négatif puisqu'il est sous l'axe du temps. C'est normal de la compter comme un déplacement négatif, car la vitesse est alors négative.

Remarquez que si on prend toutes les aires comme étant positives même lorsqu'elles sont sous l'axe du temps, on obtient la distance parcourue.

b) Quelle est l'accélération de l'objet en fonction du temps (jusqu'à  $t = 40 \text{ s}$ )

Comme l'accélération est la pente sur un graphique de la vitesse, on peut voir que de  $t = 0 \text{ s}$  à  $t = 10 \text{ s}$ , l'accélération est  $6 \text{ m/s}^2$  (la valeur de la pente)

Puis de  $t = 10 \text{ s}$  à  $t = 15 \text{ s}$ , l'accélération est nulle

Puis de  $t = 15 \text{ s}$  à  $t = 40 \text{ s}$ , l'accélération est de  $-4 \text{ m/s}^2$

Nous allons maintenant combiner les deux méthodes (intégrale et graphique)

### Exemple 1.8.4

L'accélération d'un objet est donnée par  $a = 6t$ . À  $t = 0 \text{ s}$ , on a  $x = 0 \text{ m}$  et  $v = 0 \text{ m/s}$ . Quelles sont la vitesse et la position à  $t = 5 \text{ s}$  ?

Commençons par faire le calcul de la vitesse par l'intégrale. La vitesse est

$$v = \int a dt$$

$$v = \int 6t dt$$

$$v = 3t^2 + C$$

En utilisant les conditions initiales, on a

$$v = 3t^2 + C$$

$$0 = 0 + C$$

$$C = 0$$

La vitesse est donc donnée par la formule  $v = 3t^2$ . À  $t = 5 \text{ s}$ , la vitesse est donc  $75 \text{ m/s}$ .

On aurait pu faire ce calcul par méthode graphique en calculant l'aire suivante.

L'aire de ce triangle est de 75 m/s. Notez que cette aire est le changement de vitesse. Mais comme on sait que la vitesse initiale est de 0 m/s, cela veut dire que la vitesse est de 75 m/s.

On trouve ensuite la position avec l'intégrale

$$x = \int v dt$$

$$x = \int 3t^2 dt$$

$$x = t^3 + C$$

En utilisant les conditions initiales, on a

$$x = t^3 + C$$

$$0 = 0 + C$$

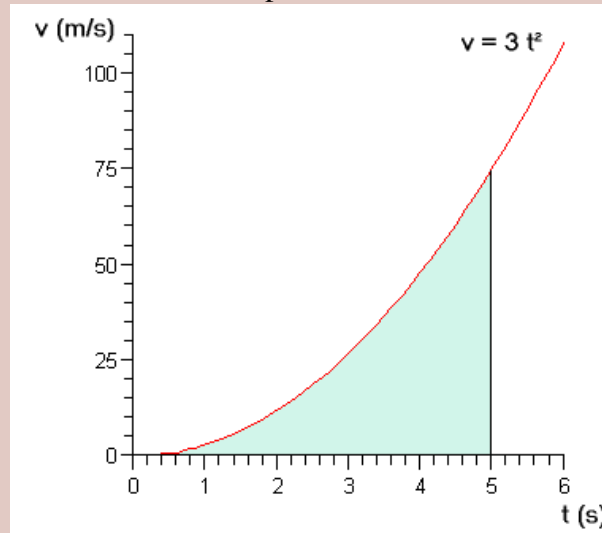
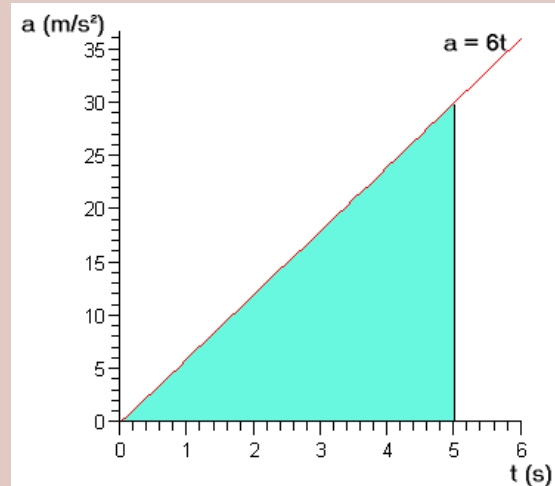
$$C = 0$$

La position est donc donnée par la formule  $x = t^3$ . La position à  $t = 5$  s est alors 125 m. On peut également faire cette partie par méthode graphique. Pour y arriver, il faut trouver l'aire sous la courbe de la figure de droite.

La difficulté ici, c'est qu'on n'a pas de formule pour calculer une aire ayant cette forme. L'aire est bien de 125 m, mais vous ne pouvez pas le calculer par méthode graphique. Remarquez encore une fois que cette aire donne le déplacement, donc le changement

de position. Comme la position initiale est de 0 m, on obtient que la position au bout de 5 secondes est 125 m, Si la position initiale avait été de 10 m, la position finale aurait été de 135 m (125 m de plus que la position initiale).

Ne soyez pas triste de ne pas pouvoir calculer cette aire. Dans le fond, on a calculé l'aire à l'aide de l'intégrale pour arriver à 125 m. Cela signifie qu'on peut calculer l'aire sous les courbes à l'aide d'intégrales. Vous pourrez explorer davantage cette merveilleuse idée dans le cours de calcul intégral.



## Résumé des équations

### Déplacement

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

### Vitesse moyenne

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

### Vitesse instantanée

$$v = \frac{dx}{dt}$$

### Accélération moyenne

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

### Accélération instantanée

$$a = \frac{dv}{dt}$$

### Équation pour le MRUA

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

### Chute gravitationnelle

$$a_{\text{gravitationnelle}} = g = 9,8 \text{ m} / \text{s}^2 \text{ vers le bas}$$

**Position à partir de la formule de la vitesse**

$$x = \int v dt$$

**Vitesse à partir de la formule de l'accélération**

$$v = \int a dt$$

## Exercices

**Chapitre 3 du Benson:**

Faire les exercices 1, 3, 7, 10, 12, 15, 17, 19, 20 b d (Faites les même si la question est écrite en rouge), 23 a\* b, 25, 26, 27, 31, 39, 41, 45, 46, 48, 50, 52, 56, 57 a b c, 58, 59, 63, 65, 67 et les problèmes 2, 7, 9, 15, 18, 21a, 23 et 24.

Correction : 23a) 13,0 m/s (au lieu de 13 m/s<sup>2</sup>)

Pumpkin drop

<http://www.youtube.com/watch?v=tbNKVmWj1K4>