14 La gravitation

14.1 Les orbites elliptiques

On va déjà examiner le cas des orbites circulaires. Toutefois, les orbites circulaires ne sont qu'un cas très particulier des orbites possibles.

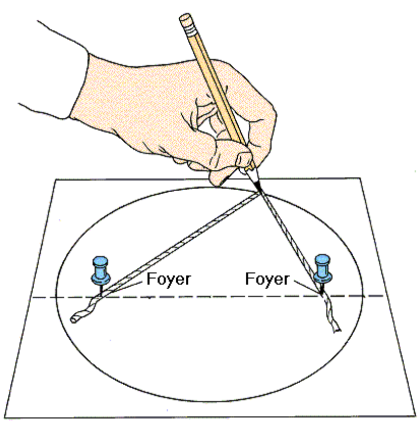
La première loi de Kepler

Après 8 ans d'études sur l'orbite de Mars, Johannes Kepler arrive à une conclusion révolutionnaire en 1608. Alors qu'on pensait depuis près de 20 siècles que les orbites des planètes devaient être des cercles parfaits, sous prétexte que les cieux devaient être parfaits pour refléter la perfection des dieux (ou du dieu), Kepler montra que les orbites avaient une forme elliptique.

Première loi de Kepler

Les orbites sont des ellipses. La masse centrale occupe un des foyers.

L'ellipse

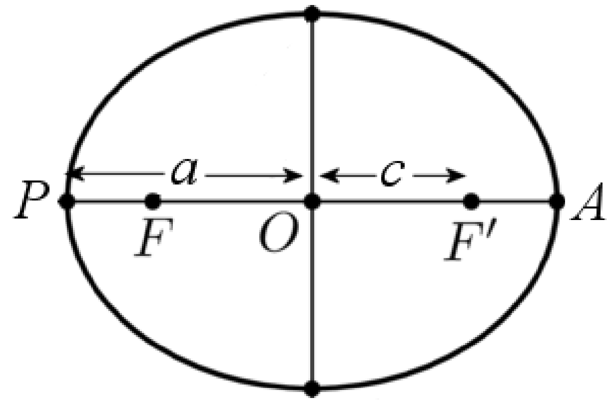


Il serait intéressant de se rappeler un peu ce qu'est une ellipse. L'ellipse ressemble à un ovale, mais elle est particulière. Pour tracer une ellipse, il suffit de fixer une corde à deux punaises plantées dans une planche. On prend alors un crayon et on trace alors la figure délimitée par la corde comme sur la figure.

Autrement dit, l'ellipse est l'ensemble des points dont la somme des distances aux foyers est constante. L'ellipse sera plus ou moins allongée selon la distance entre les punaises et la longueur de la corde. Les foyers de l'ellipse sont situés aux endroits où les punaises sont plantées.

La forme des orbites est donc identique à celle montrée sur la figure.

Les points F et F' sont les foyers. Ici, la masse centrale (l'étoile ou la planète autour de laquelle l'objet est en orbite) est située au foyer F. Le point A est le point de l'orbite le plus éloigné, nommé en général apoapside (on utilise aussi apside supérieure ou apoapse). Le point P est le point de l'orbite le plus près et est nommé en général la périapside (on utilise aussi apside inférieure ou périapse).



Il existe en fait tout un vocabulaire pour nommer ces points selon la masse centrale. Si l'orbite se fait autour du Soleil, le point le plus près est le périhélie et le point le plus loin est l'aphélie. Si l'orbite se fait autour de la Terre, le point le plus près est le périgée et le point le plus loin est l'apogée. La table suivante vous montre (à titre de curiosité) le nom de ces points selon la masse centrale.

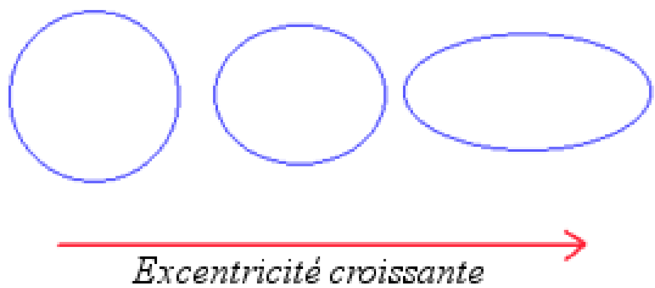
Masse centrale	Périapside	Apoapside
Galaxie	Périgalacticon	Apogalacticon
Trou noir	Périmélasme	Apomélasme
Étoile	Périastre	Apoastre
Soleil	Périhélie	Aphélie
Mercure	Périherme	Apherme
Vénus	Péricythère	Apocythère
Terre	Périgée	Apogée
Lune	Périsélène	Aposélène
Mars	Périarée	Apoarée
Jupiter	Périzène	Apozène
Saturne	Périkrone	Apokrone
Uranus	Périourane	Apourane
Neptune	Périposéide	Apoposéide
Pluton	Périhade	Aphade

La distance entre les points A et P s'appelle le grand axe de l'ellipse. Ici, nous appellerons c la distance entre le centre de l'ellipse et le foyer F ou F' et a la distance entre le centre de l'ellipse et le point A ou P (il s'agit du demi-grand axe).

L'excentricité de l'ellipse est définie par le rapport

$$e = \frac{FF'}{AP} = \frac{c}{a}$$

Si les deux foyers sont au centre, alors l'excentricité est nulle et on obtient un cercle. Plus l'excentricité est élevée, plus les foyers sont distants l'un de l'autre et plus l'ellipse est allongée. La valeur de l'excentricité ne peut toutefois dépasser 1 puisqu'alors les foyers seraient en dehors de l'ellipse.



Comme on peut le constater avec le tableau suivant, l'excentricité des orbites planétaires est en général peu élevée.

Planète	***Excentricité de l'orbite***
Mercure	0,206
Vénus	0,007
Terre	0,017
Mars	0,093
Jupiter	0,048
Saturne	0,056
Uranus	0,047
Neptune	0,009
Pluton	0,250

À l'exception de Mercure et Pluton, les orbites planétaires ne dévient que très peu d'une forme circulaire. L'orbite de Pluton est tellement excentrique qu'elle est parfois plus près du Soleil que Neptune. L'excentricité de l'orbite de Mars est relativement élevée et c'est ce qui permit à Kepler, qui étudia le mouvement de Mars, de se rendre compte que les orbites sont elliptiques. Mais ces valeurs d'excentricité ne sont rien en comparaison de l'excentricité de l'orbite de certains objets ayant des orbites très allongées telles que des comètes. Par exemple, la comète la plus connue, la comète de Halley, a une excentricité de 0,970.

Nous pouvons alors trouver des relations entre les distances à l'apoapside et à la périapside d'une part et l'excentricité et le demi-grand axe de l'ellipse d'autre part.

Les distances de l'apoapside et de la périapside en fonction du demi-grand axe *a* et de l'excentricité *e* sont

$$\begin{aligned} r_A &= a + c \\ &= a + ea \\ &= a(1+e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_P &= a - c \\ &= a - ea \\ &= a(1-e) \end{aligned}$$

r_A* et *r_p* en fonction de *a* et *e

$$r_a = a(1+e)$$
$$r_p = a(1-e)$$

Nous pouvons également inverser ces relations précédentes pour obtenir les relations entre le demi-grand axe et l'excentricité en fonction des distances à l'apoapside et à la périapside.

a* et *e* en fonction de *r_A* et *r_p

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} \qquad\qquad e = \frac{r_a - r_P}{r_a + r_p}$$

La deuxième loi de Kepler

Il est évident que la vitesse des corps ne peut être constante le long d'une orbite elliptique comme c'était le cas avec les orbites circulaires parce que l'énergie doit être conservée le long de l'orbite. En effet, pour un objet en orbite autour d'un autre objet, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

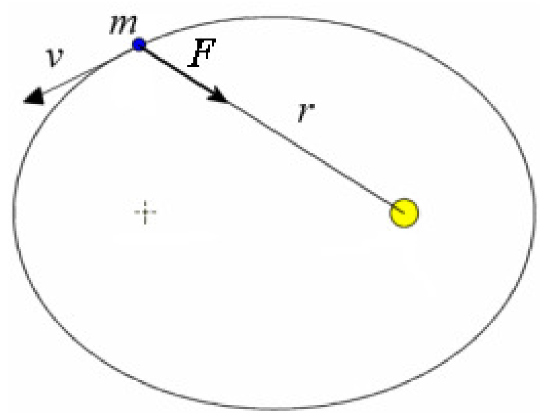
Ainsi, lorsque l'objet en orbite s'éloigne, son énergie gravitationnelle augmente et son énergie cinétique doit donc diminuer. La planète devrait donc aller le plus rapidement lorsqu'elle est à la périapside et aller le plus lentement quand elle est à l'apoapside.

Mais la conservation de l'énergie n'est pas suffisante pour déterminer la vitesse le long de l'orbite, car on ne connaît pas la valeur de l'énergie mécanique. Cependant, une autre équation nous permettra de déterminer ces vitesses : la conservation du moment cinétique.

On se rappelle qu'il y a conservation du moment cinétique si la somme des moments de force externes est nulle. En fait, il n'y a qu'une seule force, la gravitation, qui agit sur le corps pendant son mouvement orbital. Le moment de force, calculé à partir du foyer où se trouve la masse centrale, est

$$\tau = Fr\sin\theta$$

Ce moment de force est nul, car la force est dirigée exactement vers le corps central, dans la même direction que le rayon. L'angle θ est donc nul et la somme des moments de force est nulle. Puisque le moment de force net est nul, cela signifie que le moment cinétique, calculé à partir du corps central, est constant. On a donc



$$L = mrv\sin\theta = \text{constante}$$

Cette dernière équation est la deuxième loi de Kepler, quoique formulée très différemment par Kepler lorsqu'il la découvrit en 1608.

Deuxième loi de Kepler

$$mrv\sin\theta = \text{constante}$$

La vitesse à l'apoapside et à la périapside

Ces deux équations nous permettent de déterminer la vitesse au point A et P sur l'orbite elliptique.

La conservation de l'énergie nous donne

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} \qquad \textbf{(1)}$$

La conservation du moment cinétique nous donne

$$mv_A r_A = mv_P r_P \qquad \textbf{(2)}$$

Notez qu'au point A et P, l'angle entre la vitesse et le rayon est de 90° ce qui explique l'absence du sinus dans cette dernière équation. Nous avons alors deux équations avec deux inconnues, les vitesses, que nous pouvons résoudre.

De l'équation (2), nous trouvons

$$v_p = v_A \frac{r_A}{r_P}$$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_A^2 \frac{r_A^2}{r_P^2} - \frac{GMm}{r_P}$$

Nous pouvons maintenant isoler la vitesse

$$v_A^2\left(1 - \frac{r_A^2}{r_P^2}\right) = -\frac{2GM}{r_P} + \frac{2GM}{r_A}$$

$$v_A^2 r_A^2\left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_P^2}\right) = 2GM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right)$$

$$v_A^2 r_A^2\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_P}\right)\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right) = 2GM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right)$$

$$v_A^2 r_A^2\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_P}\right) = 2GM$$

$$v_A^2 r_A^2\left(\frac{r_P + r_A}{r_A r_p}\right) = 2GM$$

pour obtenir finalement

$$v_A^2 = \frac{2GM}{r_p + r_A}\frac{r_p}{r_A}$$

On peut modifier cette formule pour l'écrire en utilisant le demi-grand axe et l'excentricité.

Vitesse à l'apoapside

$$v_A^2 = \frac{2GM}{r_p + r_A}\frac{r_p}{r_A} \qquad \text{ou} \qquad v_A^2 = \frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

De là, on peut trouver la vitesse à la périapside

Vitesse à la périapside

$$v_P^2 = \frac{2GM}{r_P + r_A}\frac{r_A}{r_P} \qquad \text{ou} \qquad v_P^2 = \frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}$$

Remarquez que dans les formules des vitesses, nous revenons à la même formule pour les orbites circulaires si on met e = 0 ou $r_p = r_A$.

La période

La période pour un objet sur une orbite elliptique est

Période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad \text{ou} \quad T = \pi\sqrt{\frac{\left(r_p + r_A\right)^3}{2GM}}$$

qui est exactement la même formule que celle du mouvement circulaire dans laquelle a substitue r. La preuve de cette formule dépasse le cadre de cet ouvrage.

Exemple 14.1.1

Calculer la période et la vitesse de la comète de Halley au périhélie et à l'aphélie si on sait que r_A = 35,1 U.A. et r_P = 0,53 U.A.

(1 U.A. est une unité de distance égale à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil et qui vaut 1,5 X 10^{11} m).

La période vaut

$$\begin{aligned} T &= \pi\sqrt{\frac{\left(r_p + r_a\right)^3}{2GM}} \\ &= \pi\sqrt{\frac{\left(\left(35{,}1UA + 0{,}53UA\right)\cdot 1{,}5\times 10^{11}\, m/UA\right)^3}{2\cdot 6{,}67\times 10^{-11}\, Nm^2/kg^2 \cdot 2\times 10^{30}\, kg}} \\ &= 2{,}37\times 10^9\, s \\ &= 75{,}32 \text{ ans} \end{aligned}$$

La vitesse au périhélie est

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\frac{2GM}{r_P + r_A}\frac{r_A}{r_P}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\times 10^{-11}\, Nm^2/kg^2 \cdot 2\times 10^{30}\, kg}{\left(35{,}1UA + 0{,}53UA\right)1{,}5\times 10^{11}\, m/UA}\frac{35{,}1UA}{0{,}53UA}} \\ &= 57{,}3 km/s \end{aligned}$$

La vitesse à l'aphélie est

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{2GM}{r_P + r_A}\frac{r_P}{r_A}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2 / kg^2 \cdot 2 \times 10^{30} kg}{(35{,}1UA + 0{,}53UA) 1{,}5 \times 10^{11} m / UA} \frac{0{,}53UA}{35{,}1UA}} \\ &= 0{,}87 km / s \end{aligned}$$

Énergie mécanique des objets en orbites

L'énergie des objets en orbite tout au long de l'orbite étant conservée, nous pouvons simplement la calculer en n'importe quel point de l'orbite pour connaître sa valeur. Calculons-la à la périapside.

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{r_p} \\ &= \frac{1}{2} m \frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e} - \frac{GmM}{a(1-e)} \\ &= \frac{GMm}{a(1-e)} \left(\frac{1}{2}(1+e) - 1 \right) \\ &= \frac{GMn}{a(1-e)} \left(\frac{1}{2}(-1+e) \right) \\ &= -\frac{GMm}{2a} \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser les distances à l'apoapside et à la périapside, On a alors

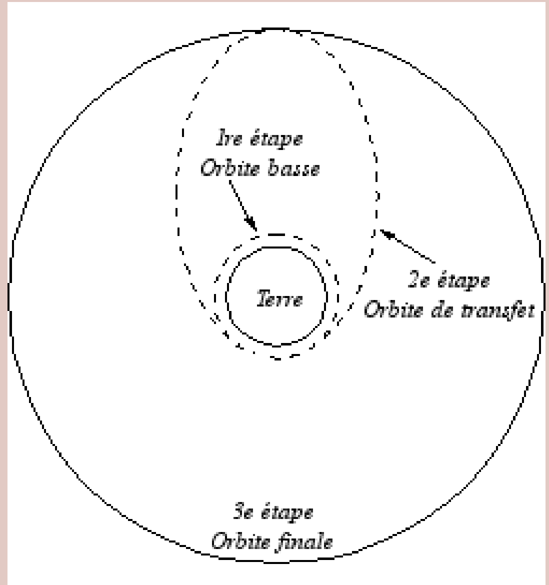
Énergie mécanique

$$E_{mec} = -\frac{GMm}{2a} \qquad \text{ou} \qquad E_{mec} = -\frac{GMm}{r_p + r_A}$$

Exemple 14.1.2

<u>La mise en orbite par étape</u>

Lorsqu'on veut placer un satellite sur une orbite assez éloignée de la Terre, on procède par étape. Premièrement, on place le satellite sur une orbite circulaire assez basse. Dans la deuxième étape, on actionne à nouveau les réacteurs pour augmenter la vitesse de la fusée de telle façon que son orbite devienne elliptique. On veut alors que la distance à l'apogée soit exactement égale à la distance à laquelle on veut mettre le satellite en orbite. Finalement, à la troisième étape, on actionne à nouveau les réacteurs lorsque le satellite est à l'apogée de telle façon que l'orbite devienne à nouveau circulaire.



<u>Première étape</u> : placer le satellite sur une orbite circulaire à 300 km d'altitude.

La vitesse sur cette orbite est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,67\times10^{-11} Nm^2/kg^2 \cdot 5,98\times10^{24} kg}{6,68\times10^6 m}} \\ &= 7,73 km/s \end{aligned}$$

et l'énergie est

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GMm}{2r} \\ &= -\frac{6,67\times10^{-11} Nm^2/kg^2 \cdot 5,98\times10^{24} kg \cdot 75kg}{2\times6,68\times10^6 m} \\ &= -2,24\times10^9 J \end{aligned}$$

<u>Deuxième étape</u> : placer le satellite en orbite elliptique (orbite de transfert)

Pour amener le satellite sur l'orbite géostationnaire, on doit avoir une orbite elliptique avec les valeurs $r_p = 6680km$ et $r_A = 42300km$.

On peut donc déduire que la vitesse au périgée sur cette orbite elliptique doit être de

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\frac{2GM}{r_P + r_A}\frac{r_A}{r_P}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6,67\times 10^{-11} Nm^2/kg^2 \cdot 5,98\times 10^{24} kg}{4,23\times 10^7 m + 6,68\times 10^6 m}\frac{4,23\times 10^7 m}{6,68\times 10^6 m}} \\ &= 10,16 km/s \end{aligned}$$

Il faudra donc augmenter la vitesse de 7,73 km/s à 10,16 km/s pour transformer l'orbite circulaire en orbite elliptique qui va amener le satellite à 42 300 km de la Terre.

L'énergie de la nouvelle orbite étant

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GMm}{r_A + r_P} \\ &= -\frac{6,67\times 10^{-11} Nm^2/kg^2 \cdot 5,98\times 10^{24} kg \cdot 75 kg}{4,23\times 10^7 m + 6,68\times 10^6 m} \\ &= -6,11\times 10^8 J \end{aligned}$$

Il faut donc donner une énergie de $-6,11\times 10^8 J - -2,24\times 10^9 J = 1,63\times 10^9 J$ pour rendre l'orbite elliptique.

<u>Troisième étape</u> : Placer le satellite sur une orbite circulaire géostationnaire

Maintenant, lorsque le satellite arrive à son point le plus éloigné de la trajectoire, exactement à 42300 km du centre de la Terre, sa vitesse n'est plus que de

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\frac{2GM}{r_P + r_A}\frac{r_P}{r_A}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6,67\times 10^{-11} Nm^2/kg^2 \cdot 5,98\times 10^{24} kg}{4,23\times 10^7 m + 6,48\times 10^6 m}\frac{6,68\times 10^6 m}{4,23\times 10^7 m}} \\ &= 1,60 km/s \end{aligned}$$

alors que la vitesse pour une orbite circulaire à cette distance est de

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,67\times 10^{-11} Nm^2/kg^2 \cdot 6\times 10^{24} kg}{4,23\times 10^7 m}} \\ &= 3,07 km/s \end{aligned}$$

Il faudra donc faire passer la vitesse de 1,60 km/s à 3,07 km/s pour transformer l'orbite elliptique en orbite circulaire ayant un rayon de 42300 km.

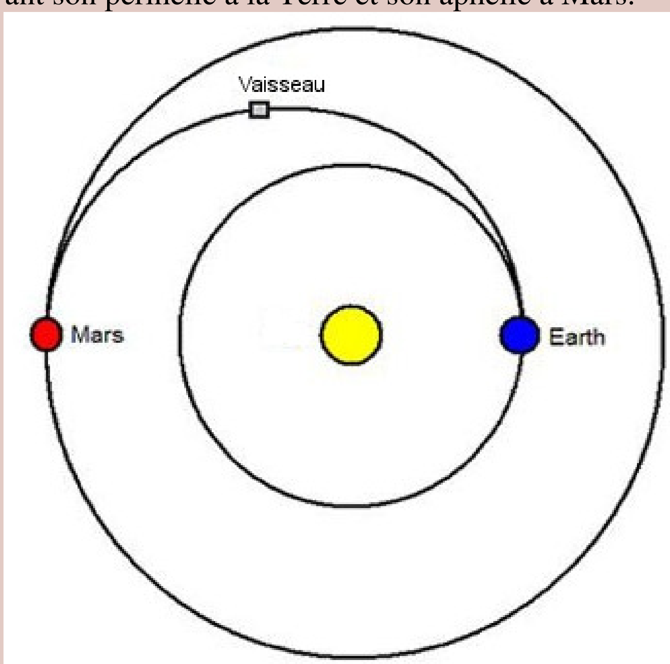
Comme l'énergie de l'orbite géostationnaire est de

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GMm}{2r} \\ &= -\frac{6{,}67\times 10^{-11} Nm^2/kg^2 \cdot 5{,}98\times 10^{24} kg \cdot 75kg}{2\cdot 4{,}23\times 10^7 m} \\ &= -3{,}54\times 10^8 J \end{aligned}$$

il faut donner une énergie de $-3,54\times10^8 J - -6,11\times10^8 J = 2,57\times10^8 J$ au satellite pour le placer en orbite circulaire.

Exemple 14.1.3

Pour aller sur Mars, on n'a pas besoin d'utiliser des réacteurs tout le long du voyage (il serait très coûteux de le faire d'ailleurs). On a qu'à placer le vaisseau spatial sur une orbite elliptique ayant son périhélie à la Terre et son aphélie à Mars.



On sait alors que $r_p = 1{,}5\times10^{11} m$ et $r_A = 2{,}3\times10^{11} m$. Le temps que devra durer le voyage sera égal à la moitié de la période puisqu'on ne parcourt que la moitié de l'orbite. Le temps sera donc de

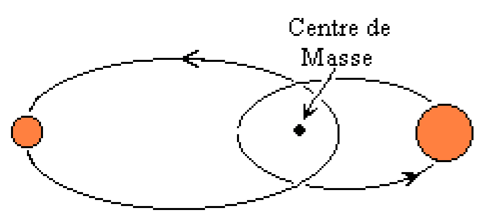
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\left(r_p + r_a\right)^3}{2GM}} \\ &= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\left(1{,}5\times 10^{11} m + 2{,}3\times 10^{11} m\right)^3}{2\cdot 6{,}67\times 10^{-11} Nm^2 / kg^2 \cdot 2\times 10^{30} kg}} \\ &= 2{,}25\times 10^{7} s \\ &= 261\, jours \end{aligned}$$

Bien sûr, il faut s'assurer que lorsque le vaisseau arrive à l'aphélie que Mars soit bien au rendez-vous. On ne peut donc pas lancer le vaisseau n'importe quand. La période propice au lancement est ce qu'on appelle la *fenêtre de lancement*.

Orbites de deux objets de masse comparable

Nous avons examiné ici des orbites dans des cas où une masse est beaucoup plus grande que l'autre. Dans ce cas, la masse la plus importante ne bouge pas beaucoup et la petite masse décrit une orbite autour de la masse la plus grande.

Mais que se produit-il si les deux objets ont des masses similaires? Alors, les forces gravitationnelles sont suffisamment grandes pour faire bouger les deux masses et la situation n'est plus aussi simple qu'auparavant. La solution de ce problème est quand même relativement simple. Les deux objets décrivent des orbites elliptiques avec le centre de masse à l'un des foyers.



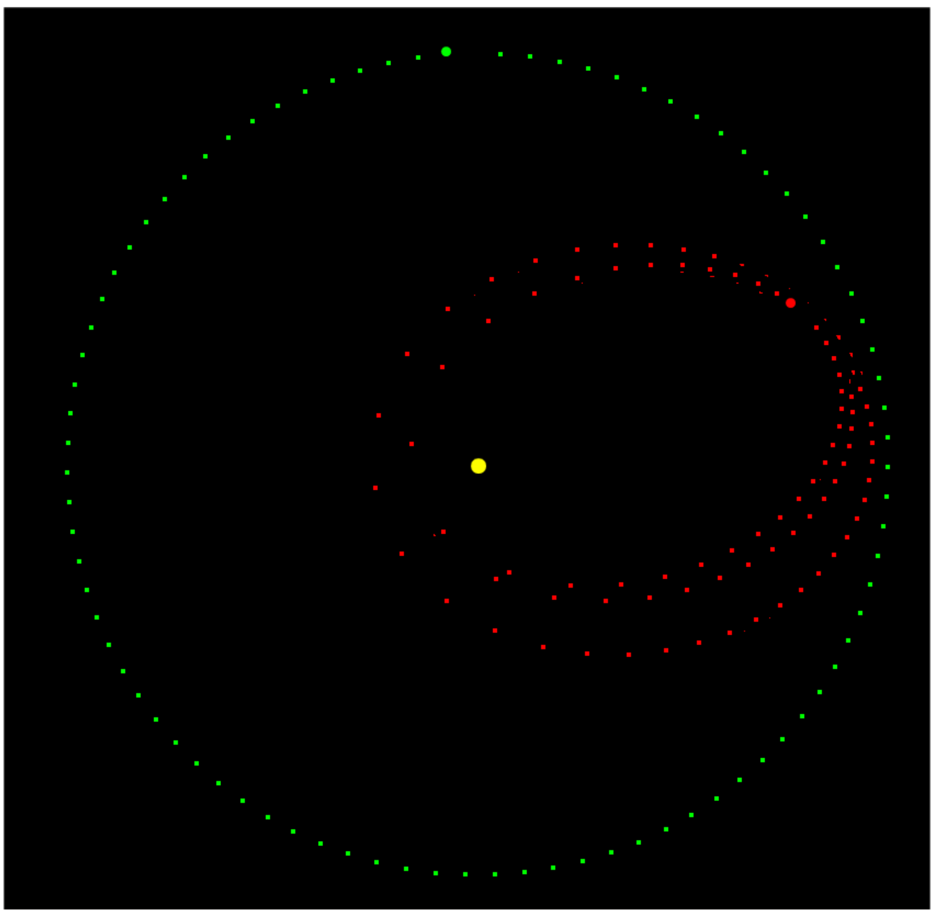
Les formules restent très similaires à celles développées pour les orbites elliptiques, mais il y aurait quelques modifications à faire concernant les masses à utiliser dans les formules. On se contentera ici de se rappeler que les deux masses en attraction mutuelle décrivent toutes deux des orbites elliptiques.

14.2 Les perturbations

La forme des orbites est encore plus complexe que ce qui a été vu précédemment. En réalité, les orbites ne sont presque jamais des ellipses parfaites. S'il n'y avait que deux corps rigides dans l'univers, alors les orbites seraient des ellipses parfaites. Dès qu'il y a plusieurs corps, alors les perturbations faites par les autres corps modifient lentement les trajectoires des corps qui passent à proximité.

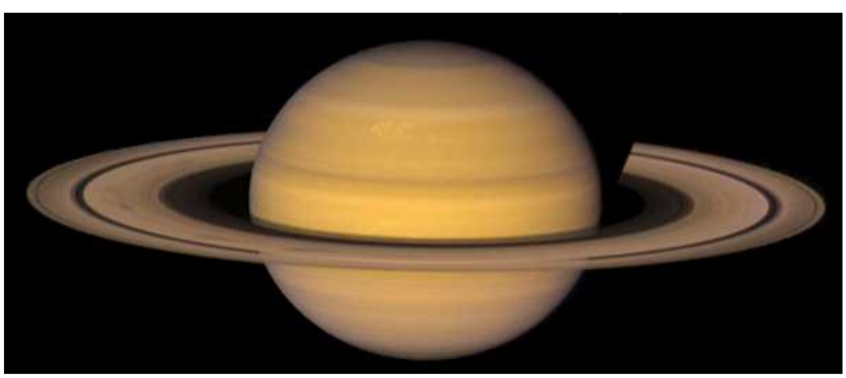
Dans le système solaire, toutes les planètes ont leur mouvement perturbé par la force gravitationnelle exercée par les autres planètes. Notons que plus une planète est légère, plus il est facile de la dévier de sa trajectoire. Les comètes étant des corps relativement légers, il arrive très souvent que leurs orbites elliptiques soient modifiées, spécialement si elles passent près d'une planète massive comme Jupiter. Les astéroïdes sont également fortement influencés par la force gravitationnelle de Jupiter. Bien qu'ils ne passent pas nécessairement très près de Jupiter, la force gravitationnelle qu'exerce cette dernière est suffisamment grande pour avoir des effets à long terme.

On peut voir sur cette figure les modifications faites (sur une période de 50 ans) à l'orbite d'un astéroïde (en rouge) qui vient passer trop près de Jupiter (en vert).



C'est d'ailleurs grâce aux perturbations que fut découverte la planète Neptune en 1846. William Herschell avait découvert la planète Uranus tout à fait par hasard en 1781 et on étudia son orbite à partir de ce moment. En 1820, il était clair qu'il y avait un problème avec l'orbite de cette planète. Elle semblait dévier de l'orbite prévue. Certains pensèrent alors qu'une autre planète inconnue (qu'on appellera Neptune) située au-delà de l'orbite d'Uranus perturbait de mouvement de celle-ci. (Effectivement, en 1821, Uranus et Neptune étaient le plus près l'un de l'autre et la force de perturbation était alors à son maximum.) John Couch Adams et Urbain Le Verrier se lancèrent alors tous deux dans le calcul de la position de l'objet perturbateur et arrivèrent sensiblement à la même position pour Neptune. Le résultat était un peu approximatif, car il y avait quelques suppositions à faire, comme la distance de cette nouvelle planète par exemple. Lorsqu'Adams envoya ses résultats à l'observatoire de Greenwich en septembre 1845, on ne parvint pas à confirmer ses résultats. Il faut dire qu'on mit peu d'effort pour y arriver, car le directeur de l'observatoire n'était pas tellement impressionné par la méthode employée. Il aurait fallu mettre beaucoup d'effort pour un résultat incertain, disait-il. Puis, en juin 1846, Le Verrier publie le résultat de ses calculs. La similarité de ses résultats avec ceux d'Adams convainc alors les observateurs de Greenwich que ce qu'Adams avait fait était peut-être bon et ils se lancent dans une recherche plus soutenue de la planète. Pendant ce temps, le Verrier envoie ses résultats à l'observatoire de Berlin en septembre 1846, après avoir tenté en vain d'intéresser les astronomes français. À cet observatoire, ils ont une excellente carte du ciel de l'endroit où devrait se retrouver Neptune selon Le Verrier. Cette carte leur permet de voir le moindre changement dans cette région du ciel. Ainsi, en moins d'une heure, les astronomes de Berlin découvrent Neptune à environ un degré de la position prévue par Le Verrier. Après l'annonce de cette découverte, les astronomes de Greenwich purent s'apercevoir qu'ils avaient observé Neptune deux fois sans s'en rendre compte…Tout ça pour dire que la loi de la gravitation nous a permis de découvrir Neptune par calcul. C'est un des plus grands succès de la théorie de la gravitation de Newton.

Bien souvent, les effets des perturbations se compensent au cours du temps et l'orbite, bien que perturbée, est assez stable. Mais si les perturbations se font toujours au même endroit, à intervalle régulier, alors l'orbite ne sera pas stable. Ainsi, si un astéroïde a une période exactement égale à la moitié de celle de Jupiter, le maximum des perturbations, qui se produit quand l'astéroïde et Jupiter sont le plus près un de l'autre, arrive toujours au même endroit sur l'orbite de l'astéroïde, soit à toutes les deux révolutions de l'astéroïde sur son l'orbite. Alors, au lieu de se compenser au cours du temps, les perturbations s'additionnent toujours et l'astéroïde est lentement déplacé de cette orbite. C'est ce qu'on appelle le phénomène de résonance gravitationnelle. Si on examine la distribution des astéroïdes dans le système solaire, on remarque effectivement qu'il n'y a pas d'astéroïdes à certaines distances qui correspondent aux orbites dont la période à un rapport simple avec la période de Jupiter. Le même phénomène se produit dans les anneaux de Saturne. Les perturbations des satellites empêchent certaines orbites pour les petites roches formant l'anneau, ce qui explique les bandes noires des anneaux.



Les perturbations affectent également les objets plus massifs comme la Terre. À cause des perturbations faites par les autres planètes, l'excentricité de l'orbite de la Terre varie au cours du temps. Les planètes n'étant pas des sphères uniformes, les autres planètes exercent également un moment de force qui peut modifier la direction de l'axe de rotation des planètes. Ainsi, il peut même arriver que l'axe s'inverse complètement et qu'ainsi la planète tourne à l'envers des autres, comme c'est le cas actuellement pour Vénus. Pour la Terre, un tel changement drastique ne peut se produire, car la présence de la Lune à tendance à stabiliser la direction de l'axe de rotation de la Terre et elle ne peut que varier que de quelques degrés. Tous ces changements du mouvement de la Terre ont une énorme influence sur le climat de la Terre et sont en grande partie responsables des glaciations.

Il est impossible ici de donner des équations pour décrire le mouvement des planètes en tenant compte des perturbations. Il a été montré qu'il était impossible de donner une solution exacte dès qu'il y a 3 corps ou plus en interaction. On peut cependant faire des approximations et des simulations sur ordinateurs.

14.3 Le champ gravitationnel

Définition du champ gravitationnel

Si on place un objet à un endroit et qu'il subit une force gravitationnelle, on va dire qu'il y a un champ gravitationnel à cet endroit. On notera ce champ par g. On va définir le champ pour avoir les caractéristiques suivantes

1) Plus le champ est fort, plus la force est grande.
2) Plus on place une masse importante dans un champ, plus la force est grande.

La deuxième caractéristique se remarque facilement à la surface de la Terre. Si on place une petite roche à un endroit, elle subit une certaine force. Si on place une masse deux fois plus grande au même endroit, on va remarquer que la force sera deux fois plus grande.

La valeur du champ peut varier d'un endroit à l'autre. C'est d'ailleurs pour ça qu'on dit que c'est un champ, car en mathématiques, un champ est une quantité dont la valeur peut varier d'un endroit à l'autre.

On peut résumer la définition du champ gravitationnel avec la formule suivante.

Force sur un objet de masse *m* dans un champ gravitationnel

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Comme la force est un vecteur, g doit aussi être un vecteur. Ce vecteur pointe dans la direction de la force que subira une masse si on la place à cet endroit. Le champ gravitationnel est donc un champ vectoriel.

L'unité du champ est le N/kg ou encore le m/s² (qui sont deux unités équivalentes)

Qu'est-ce qui fait le champ?

On peut se demander d'où vient le champ s'il y a un champ à un endroit. La réponse n'est pas si compliquée. S'il y a un champ gravitationnel à un endroit, c'est qu'une masse va subir une force gravitationnelle si on la place à cet endroit. Or, si elle subit une force gravitationnelle, c'est qu'elle est attirée par d'autres corps. Donc s'il y un champ à un endroit, c'est qu'il y a des masses autour de cet endroit. Cela veut donc dire que

Les masses font un champ gravitationnel autour d'elle.

Par exemple, il y a un champ gravitationnel dans votre chambre parce qu'il y a un corps très important tout près de votre chambre qui fait un champ autour de lui: La Terre.

Champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M*

Si les masses font un champ autour d'elle, on doit être en mesure de déterminer l'intensité de ce champ. Commençons par un cas simple. On va déterminer quel est le champ gravitationnel fait par une masse ponctuelle de masse M.

On sait que si on a deux masses ponctuelles (de masses M et m), la force entre les deux est

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

On sait aussi que si la masse m subit une force, c'est qu'elle est dans un champ gravitationnel. La force est

$$F = mg$$

Comme ces deux façons de voir la force gravitationnelle doivent donner le même résultat, on a

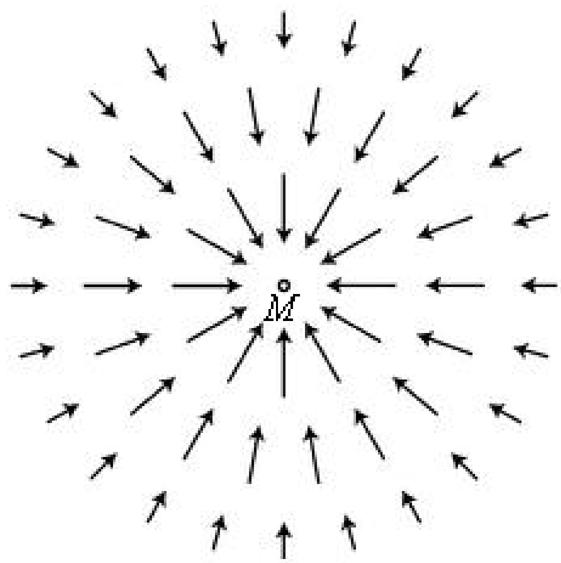
$$mg = G\frac{Mm}{r^2}$$

ce qui nous donne

Grandeur du champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M*

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

On voit que le champ gravitationnel diminue rapidement à mesure qu'on s'éloigne de la masse. Aussi, plus la masse sera importante, plus le champ gravitationnel sera important autour de la masse. La direction du champ à différents endroits autour de la masse M est illustrée sur la figure.



Le champ pointe toujours vers la masse *M*, car c'est la direction de la force que fait la masse *M* sur les masses autour d'elle puisque la force gravitationnelle est toujours attractive.

Champ gravitationnel d'un objet non ponctuel

Pour calculer le champ fait par un objet de forme quelconque, on va le séparer en petits morceaux infinitésimalement petits qu'on pourra considérer comme ponctuels. On va ensuite calculer le champ fait par chacun de ces morceaux. La grandeur du champ fait par ce petit morceau ponctuel de masse *dm* sera, comme pour une masse ponctuelle,

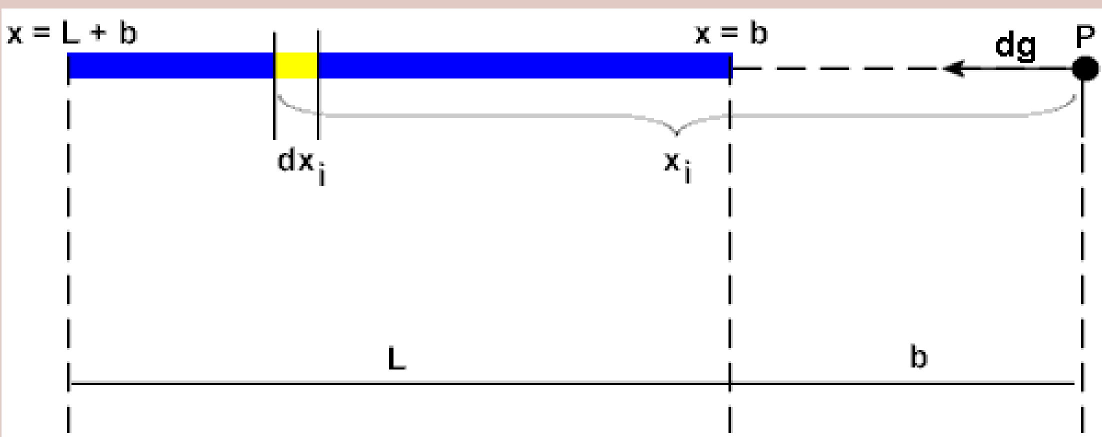
$$dg = \frac{Gdm}{r^2}$$

Finalement, on va sommer pour obtenir le champ total. Cette somme d'infinitésimale nous donnera une intégrale à résoudre.

Comme on l'a dit précédemment, vous n'êtes pas tout à fait prêt pour faire des intégrales dans des objets en trois dimensions. On peut cependant le faire pour des objets en une dimension : des tiges. Voici un exemple, uniquement pour illustrer la procédure.

Exemple 14.3.1

Calculer le champ gravitationnel au point P situé à une distance *b* d'une tige rectiligne uniforme de longueur *L*.



La grandeur du champ gravitationnel fait par un petit morceau, que nous appellerons *dg*, est

$$dg = G\frac{dm}{x^2}$$

où *dm* est la masse du petit morceau et *x* est la distance entre le petit morceau et le point P.

Si la tige est de densité uniforme alors la masse est $dm = \lambda dy$, λ étant la densité de masse de la tige. Le champ gravitationnel fait par le petit morceau est donc

$$dg = G\frac{\lambda dx}{x^2}$$

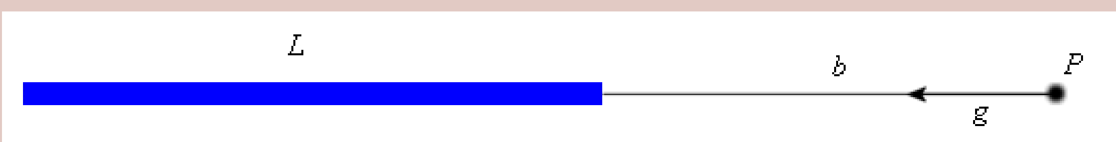
La grandeur du champ total est simplement la somme des champs faits par chacun des petits morceaux.

$$\begin{aligned} g &= \int_b^{b+L} G\frac{\lambda dx}{x^2} \\ &= G\lambda\left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_b^{b+L} \\ &= G\lambda\left[\frac{-1}{b+L} - \frac{-1}{b}\right] \\ &= G\lambda\left[\frac{-b}{b(b+L)} + \frac{b+L}{b(b+L)}\right] \\ &= \frac{G\lambda L}{b(b+L)} \end{aligned}$$

Puisque λL est la masse, le champ est donc

$$g = \frac{GM}{b(b+L)}$$

Dans la direction suivante



Ce calcul est de loin le plus simple qu'on peut faire pour trouver le champ d'un objet non ponctuel. Dans la plupart des cas, il faut, en plus, séparer le vecteur dg en composantes avant de faire les intégrales pour chaque composante. C'est de toute beauté.

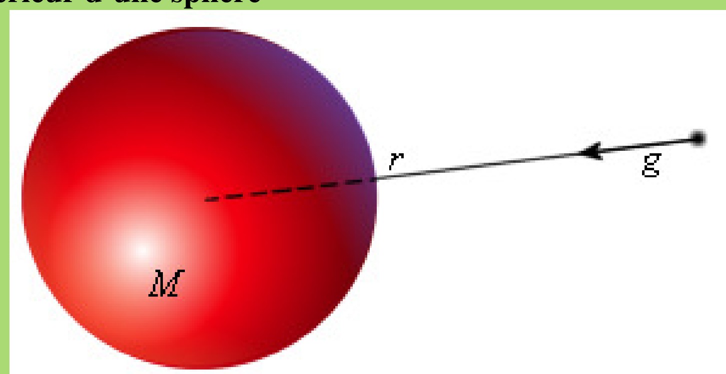
Le champ gravitationnel d'une sphère

Le champ gravitationnel d'une sphère est d'une importance capitale puisque c'est la forme des planètes et des étoiles, seuls objets qui ont une masse suffisante pour générer des forces gravitationnelles non négligeables. On pourrait même dire que le calcul du champ gravitationnel pour toutes autres formes que la sphère n'est qu'un simple exercice intellectuel dont la seule utilité est de nous divertir.

On trouve le champ résultant d'une sphère de la même façon que ce qu'on a fait avec la tige : on sépare la sphère en petits morceaux et on trouve le champ fait par chacun des petits morceaux. On somme ensuite à l'aide d'une intégrale les champs faits par chacun des petits morceaux pour obtenir le champ total. Le résultat de ce calcul assez complexe, qu'on vous épargne, est étonnamment simple. À l'extérieur d'une sphère, le champ gravitationnel est identique à celui fait par une masse ponctuelle de même masse qui serait située au centre de la sphère. Autrement dit, le champ gravitationnel à l'extérieur d'une sphère est donné par

Champ gravitationnel à l'extérieur d'une sphère

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

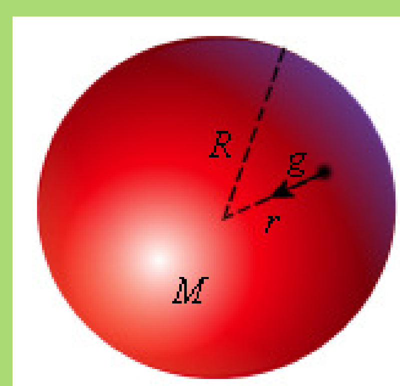


où r est la distance à partir du <u>centre</u> de la sphère.

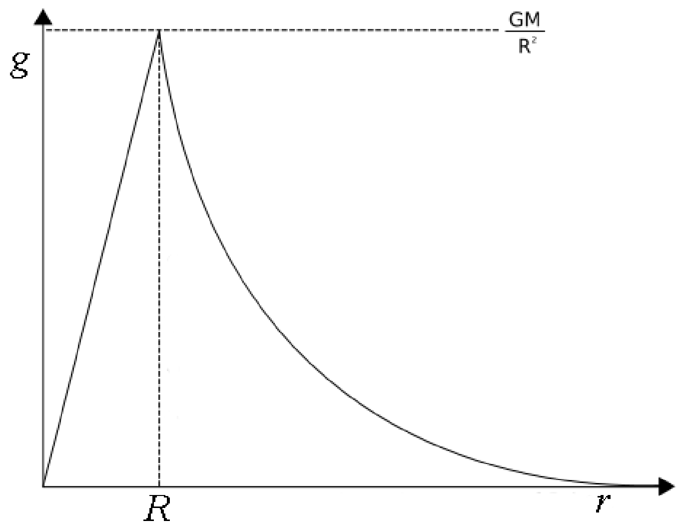
À l'intérieur de la sphère, le champ gravitationnel dépend de la façon dont la masse est répartie. Si la masse est répartie uniformément, on a

Champ gravitationnel à l'extérieur d'une sphère de densité constante

$$g = \frac{GMr}{R^3}$$



Le graphique de la valeur du champ en fonction de la distance du centre de la sphère est donc



Le champ gravitationnel d'une sphère uniforme atteint donc sa valeur maximale à la surface de la sphère. Avec ces formules, on peut trouver le champ gravitationnel d'une planète comme la Terre.

Exemple 14.3.2

Un satellite de 100 kg est entre la Terre et la Lune, à l'endroit indiqué sur la figure ?

a) Quel est le champ à cet endroit?

Le champ total est la somme des champs faits par chaque planète. Comme le champ est toujours vers la planète qui cause le champ, le champ fait par la Terre est vers la gauche et le champ fait par la Lune est vers la droite.

On a donc

$$g = -\frac{GM_{Terre}}{r_{Terre}^2} + \frac{GM_{Lune}}{r_{Lune}^2}$$

$$g = -\frac{6,67\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,97\times10^{24}\,kg}{\left(2\times10^{8}\,m\right)^2} + \frac{6,67\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,36\times10^{22}\,kg}{\left(1,85\times10^{8}\,m\right)^2}$$

$$g = -0,009955\,\tfrac{N}{kg} + 0,000143\,\tfrac{N}{kg}$$

$$g = -0,009812\,\tfrac{N}{kg}$$

Comme la réponse est négative, cela signifie que le champ gravitationnel est vers la Terre.

b) Quelle est la force sur le satellite?

La force est

$$\begin{aligned} F &= mg \\ F &= 100kg \times -0,009812\tfrac{N}{kg} \\ F &= -0,9812N \end{aligned}$$

Comme la force est négative, elle est dirigée vers la Terre.

Le champ gravitationnel à la surface de la Terre

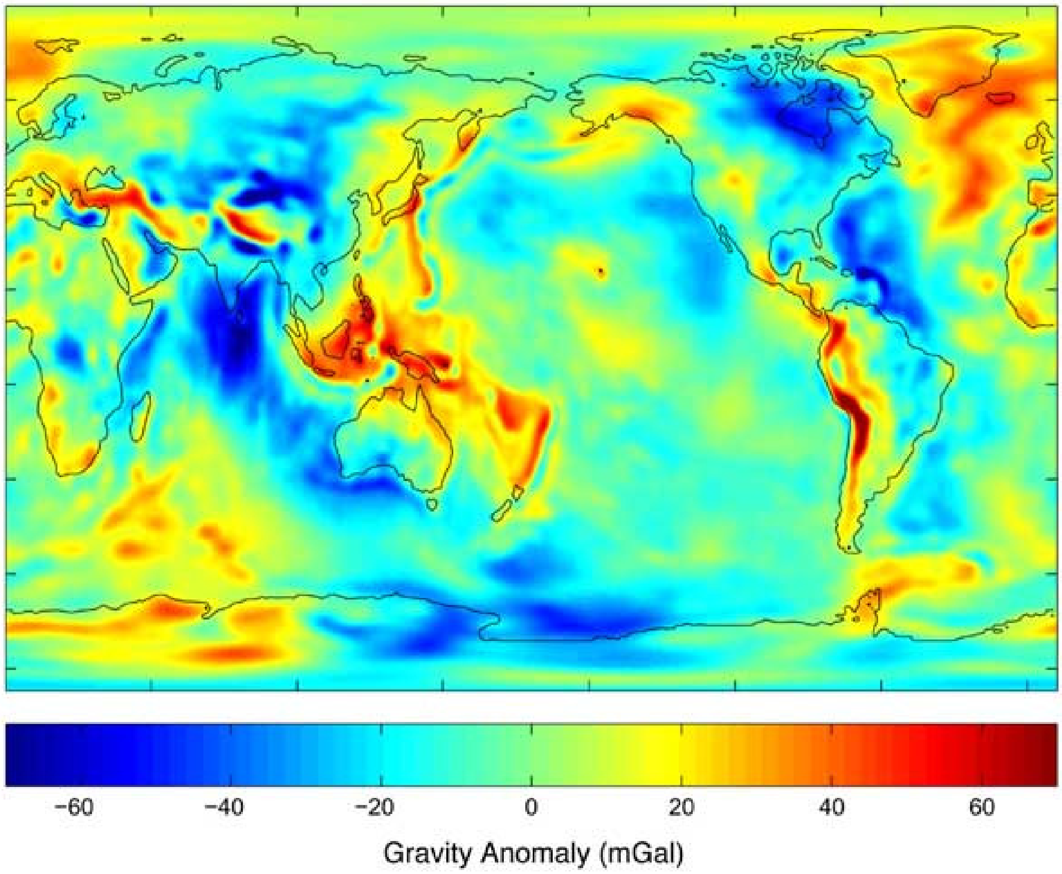
Si la Terre était une sphère parfaite alors le champ gravitationnel à la surface serait le même partout, soit

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67\times10^{-11}Nm^2/kg^2 \cdot 5,972\times10^{24}kg}{\left(6,378\times10^6 m\right)^2} = 9,79N/kg$$

Mais la Terre n'est pas une sphère parfaite, elle est une sphère légèrement aplatie. Ainsi, l'intensité du champ gravitationnelle varie avec la latitude. Le calcul de la valeur du champ dans ce cas est assez difficile, mais un bon résultat approximatif est

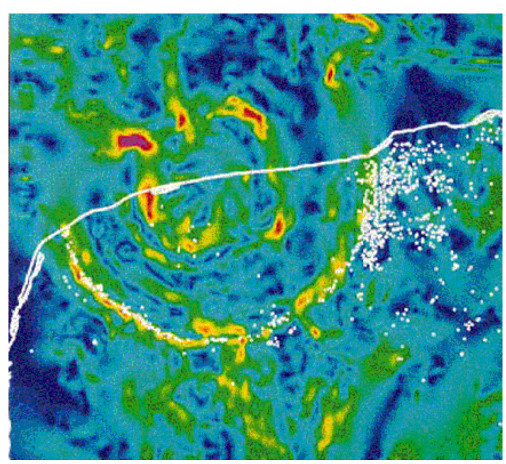
$$g = \left(9,780327 + 0,0516323\sin^2\varphi + 0,0002269\sin^4\varphi\right)N/kg$$

où ϕ est la latitude. Québec étant aux alentours de $\phi = 46^0$, on a un champ gravitationnel de 9,807105 N/kg. Nous pouvons encore avoir des déviations de l'ordre de 10^{-3} N/kg par rapport à ce résultat puisque la Terre n'est pas un ellipsoïde de révolution parfait (il y a des variations d'altitude) et n'a pas une composition parfaitement uniforme. La valeur de *g* peut donc changer selon la structure géologique locale. C'est ce qu'on appelle l'anomalie de la gravitation. La carte suivante vous montre l'anomalie à la surface de la Terre (le Gal est une unité valant 0,01 N/kg)



On peut donc estimer que l'anomalie à Québec est environ de -20 mGal et l'intensité du champ à 9,80711 – 0,00020 = 9,80691 N/kg.

L'anomalie de gravitation n'est jamais très grande, de l'ordre de 10^{-4} N/kg, mais peut être suffisante pour permettre de détecter certaines structures géologiques d'intérêt dans le sol telles que des nappes de pétrole. C'est d'ailleurs de cette façon qu'on a trouvé le cratère du météorite qui a contribué à l'extinction des dinosaures il y a 65 millions d'années. Il est sur la péninsule du Yucatan au Mexique.



Pour découvrir ces éléments, il faut des appareils très précis. Sachez qu'il existe actuellement des appareils pouvant détecter des variations aussi faibles que 10^{-8} N/kg dans le champ gravitationnel terrestre. Ces appareils sont si sensibles qu'ils détectent un changement du champ gravitationnel si on les soulève d'à peine 5 mm !

Le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre

Calculons le champ en utilisant la formule du champ à l'intérieur d'une sphère uniforme.

Exemple 14.3.3

Quel est le champ gravitationnel fait par la Terre à 500 km sous la surface? (si on suppose que la densité de la Terre est la même partout)

Le champ est

$$g = \frac{GMr}{R^3}$$

$$g = \frac{6,67\times10^{-11} Nm^2 / kg^2 \times 5,97\times10^{24} kg \times 5,88\times10^6 m}{\left(6,38\times10^6 m\right)^3}$$

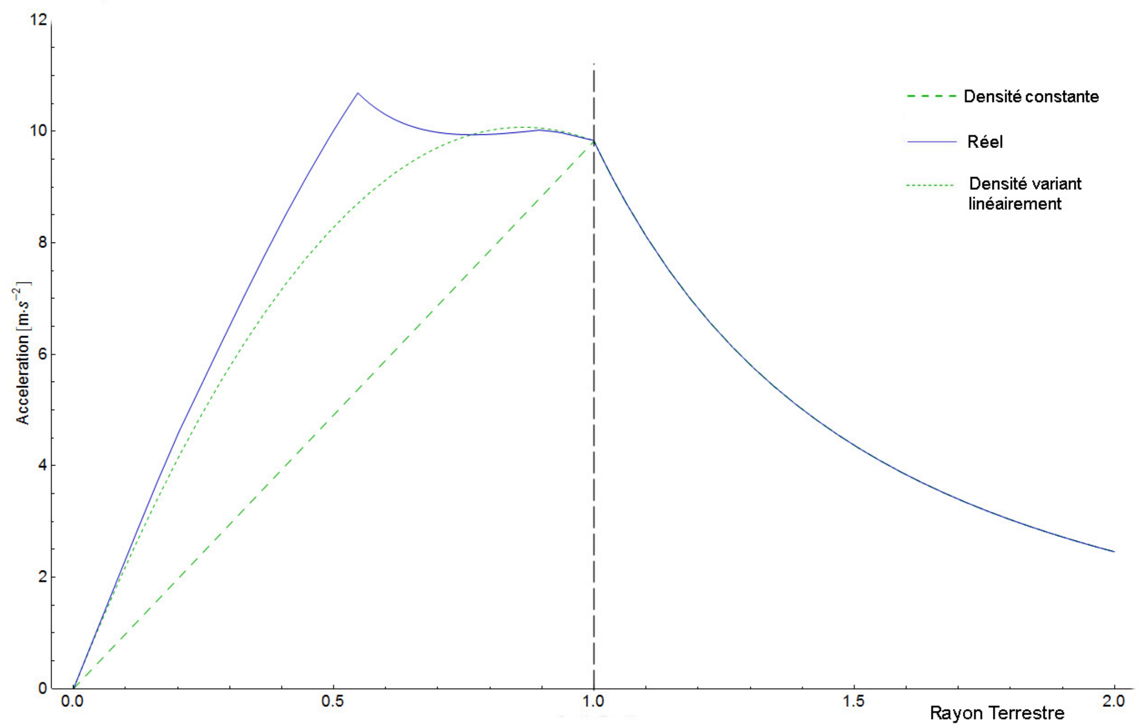
$$g = 9,02 N / kg$$

Avec la formule du champ à l'intérieur d'une sphère, on pourrait donc croire que le champ gravitationnel diminue lorsqu'on pénètre à l'intérieur de la Terre mais ce n 'est pas le cas puisque la densité de Terre n'est par uniforme, la densité étant plus élevée au centre de la Terre que près de la surface. Le champ gravitationnel augmente encore un peu lorsqu'on se dirige vers le centre de la Terre à partir de la surface et ne commence à diminuer que plus profondément à l'intérieur.

Profondeur km	g m/s²	Profondeur km	g m/s²
0	9,82	1400	9,88
33	9,85	1600	9,86
100	9,89	1800	9,85
200	9,92	2000	9,86
300	9,95	2200	9,90
413	9,98	2400	9,98
600	10,01	2600	10,09
800	9,99	2800	10,26
1000	9,95	2900	10,37
1200	9,91	4000	8,00

On ne connaît pas la variation exacte de g au-delà de 4000 km, mais on sait qu'il doit être égal à 0 au centre de la Terre (6380 km).

Ce qui donne le graphique suivant.



La force d'attraction entre deux sphères

Quand nous avons parlé pour la première fois de la force gravitationnelle entre deux planètes, nous avons dit que nous pouvons prendre la formule de Newton à condition d'utiliser les distances entre les centres des planètes. Nous avons cependant dit que, formellement, la formule s'appliquait entre des masses ponctuelles. Est-il correct de l'utiliser pour calculer la force entre deux planètes?

Le calcul se fait en fait en deux étapes. C'est d'ailleurs un des grands intérêts d'utiliser le concept de champ gravitationnel : il sert d'intermédiaire qui va permettre de séparer le calcul de la force entre deux parties. On commence par calculer le champ gravitationnel fait par une des sphères. On connait le résultat dans ce cas : un champ identique à celui d'une masse ponctuelle située au centre de la sphère. On doit ensuite calculer la force sur la deuxième sphère en calculant la force sur chaque atome de la deuxième sphère causée par le champ de la première sphère et en sommant toutes ces forces en faisant une intégrale. Le résultat est encore une fois remarquablement simple. La force entre les sphères est la même que celle qu'on aurait si toute la masse de chaque sphère était concentrée au centre de la sphère! Ce calcul a demandé de faire deux intégrales assez complexes (une pour le calcul de g pour le champ de la première sphère et une autre pour la force sur la deuxième sphère), mais le résultat est tout simple. La force entre deux sphères est donnée par

Force de gravitation entre deux sphères

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

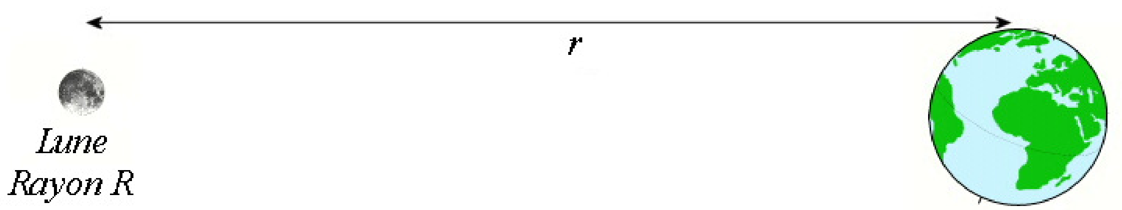
où r est la distance entre les centres des sphères.

14.4 Les marées

Grandeur de la force de marée

Les marées sont dues au fait qu'un objet non ponctuel se retrouve dans un champ gravitationnel qui n'est pas constant. Pour montrer l'origine des marées, on va examiner les forces de marées s'exerçant sur la Lune.

La Lune se retrouve dans le champ gravitationnel de la Terre qui diminue avec la distance. Calculons la différence de champ gravitationnel entre la surface du satellite et le centre pour un point directement en face de la Terre. Comme la Lune n'est pas très grande, on va supposer que le taux de variation du champ est constant.



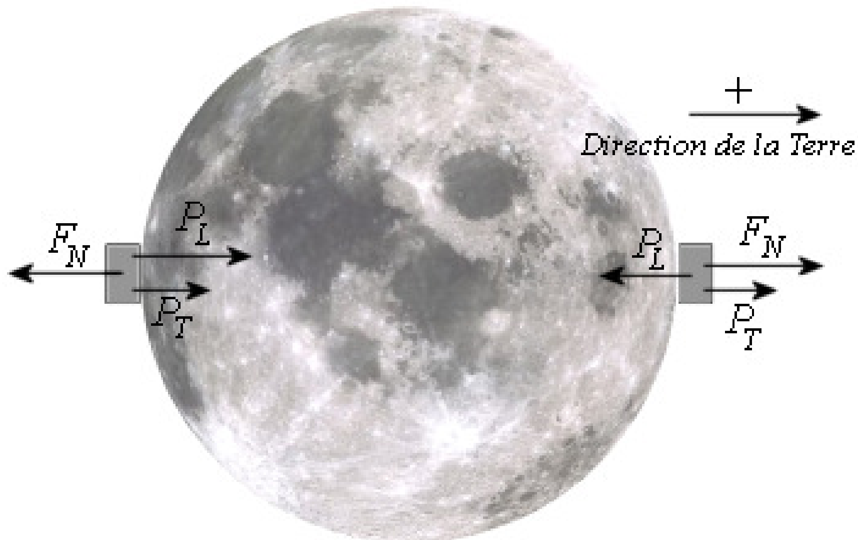
$$\begin{aligned}\Delta g &= (\text{taux de variation de g})\times(\text{distance})\\ &= \left|\frac{dg}{dr}R\right|\\ &= \left|\frac{d\left(\frac{GM_{Terre}}{r^2}\right)}{dr}R\right|\\ &= \frac{2GM_{Terre}}{r^3}R\end{aligned}$$

Comme on suppose que le taux est constant, c'est aussi la différence entre le champ au centre de la Lune et la surface opposée de la Lune.

Regardons maintenant l'effet de cette variation de champ sur deux masses placées sur la Lune. Chacune de ces masses est attirée par la Lune et la Terre. Rappelons pour commencer que la Lune, et tout ce qu'il y a dessus, accélère vers la Terre puisqu'elle fait un mouvement circulaire et qu'il y a une accélération vers le centre de l'orbite. Cette accélération est causée par la force de gravitation de la Terre. On a donc

$$\frac{GM_{Terre}M_{Lune}}{r^2} = M_{Lune}a$$
$$a = \frac{GM_{Terre}}{r^2}$$

Les forces sur des objets posés sur la Lune sont donc



Du côté droit (face du coté de la Terre), on a

$$F_N + P_T - P_L = ma$$
$$F_N + mg_{Terre} - P_L = ma$$
$$F_N + m\left(g_{\text{centre de Lune}} + \Delta g\right) - P_L = ma$$
$$F_N + m\left(\frac{GM_{Terre}}{r^2} + \frac{2GM_{Terre}R}{r^3}\right) - P_L = m\frac{GM_{Terre}}{r^2}$$

On voit que le premier terme de la parenthèse est annulé par le côté droit de l'équation. On obtient alors

$$F_N + \frac{2GM_{Terre}mR}{r^3} - P_L = 0$$
$$F_N = P_L - \frac{2GM_{Terre}mR}{r^3}$$

On voit que la normale est plus petite que ce qu'on aurait eu sans la présence de la Terre (la normale aurait alors été égale au poids). La force de marée fait donc une force qui tente de soulever l'objet de la surface. C'est ainsi parce que l'objet à la surface de la Lune du côté de la Terre subit une accélération gravitationnelle faite par la Terre plus grande que celle du centre de la Lune. L'objet cherche donc à accélérer plus rapidement que la Lune dans son ensemble. Cette trop grande force faite par la Terre est compensée par une diminution de la normale qui permet à l'objet d'avoir la même accélération que la Lune.

Du côté gauche (face du coté opposé à la Terre), on a

$$\begin{aligned}
-F_N + P_T + P_L &= ma \\
-F_N + mg_{Terre} + P_L &= ma \\
-F_N + m\left(g_{\text{centre de Lune}} - \Delta g\right) + P_L &= ma \\
-F_N + m\left(\frac{GM_{Terre}}{r^2} - \frac{2GM_{Terre}R}{r^3}\right) + P_L &= m\frac{GM_{Terre}}{r^2}
\end{aligned}$$

On voit encore une fois que le premier terme de la parenthèse est annulé par le côté droit de l'équation. On obtient alors

$$\begin{aligned}
-F_N - \frac{2GM_{Terre}mR}{r^3} + P_L &= 0 \\
F_N &= P_L - \frac{2GM_{Terre}mR}{r^3}
\end{aligned}$$

On remarque encore une fois que la normale est plus petite que ce qu'on aurait eu sans la présence de la Terre (la normale aurait alors été égale au poids). La force de marée fait donc une force qui tente de soulever l'objet de la surface. C'est ainsi parce que l'objet à la surface de la Lune du côté opposé à la Terre subit une accélération gravitationnelle faite par la Terre plus petite que celle du centre de la Lune. L'objet cherche donc à accélérer moins rapidement que la Lune dans son ensemble. Cette trop petite force faite par la Terre est compensée par une diminution de la normale qui permet à l'objet d'avoir la même accélération que la Lune. On remarque que la grandeur de cette force de marée est identique à ce qu'on avait de l'autre côté de la Lune.

Jusqu'ici, on pourrait croire que ce raisonnement ne s'applique que pour la Lune, mais on a vu que la situation n'est pas aussi simple. Ce n'est pas simplement la Lune qui tourne autour de la Terre, mais plutôt les deux qui sont en rotation autour du centre de masse. La situation de la Terre est donc tout à fait identique à celle de la Lune et la Terre subit donc les forces de marées de la Lune exactement comme la Lune subit les forces de marée de la Terre.

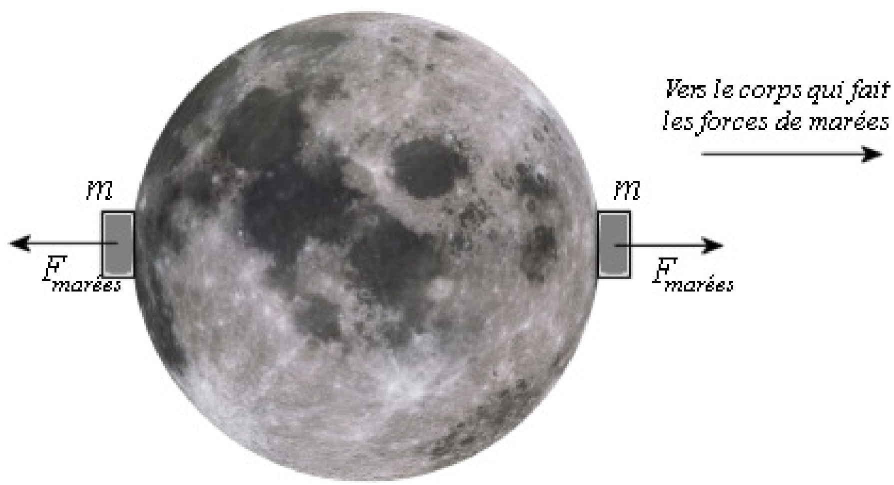
De façon générale, toutes les planètes ou les étoiles autour d'un corps vont faire une force de marées sur ce corps. Si la planète ou l'étoile qui fait les forces de marées a une masse M, que le rayon du corps qui subit les forces de marées est R et que la distance entre le corps qui subit la force et celui qui fait la force est r, alors la force de marées est

Force de marées

$$F_{marées} = \frac{2GMmR}{r^3}$$

Le Soleil exerce donc aussi des forces de marées sur la Terre, mais celles-ci sont environ la moitié de celles exercées par la Lune même si la masse du Soleil est plus grande principalement parce que Soleil est beaucoup plus loin et que les forces de marées diminuent rapidement avec la distance.

La direction des forces de marées de chaque côté de la planète est



Exemple 14.4.3

Quelle est la force de marée faite par la Lune sur un objet de 100 kg à la surface de la Terre (du côté de la Lune ou opposé à la Lune)?

La force est

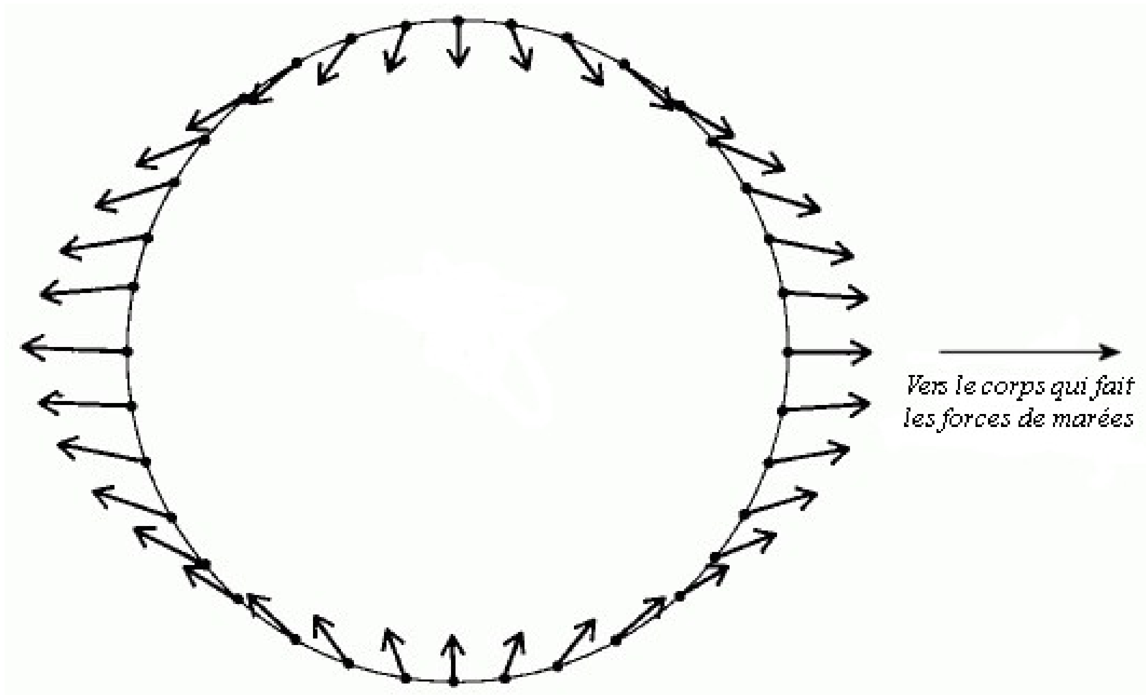
$$F_{marées} = \frac{2GMmR}{r^3}$$

$$F_{marées} = \frac{6,67\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\times7,36\times10^{22}\,kg\times100kg\times6,37\times10^{6}\,m}{\left(3,84\times10^{8}\,m\right)^3}$$

$$F_{marées} = 1,1\times10^{-4}\,N$$

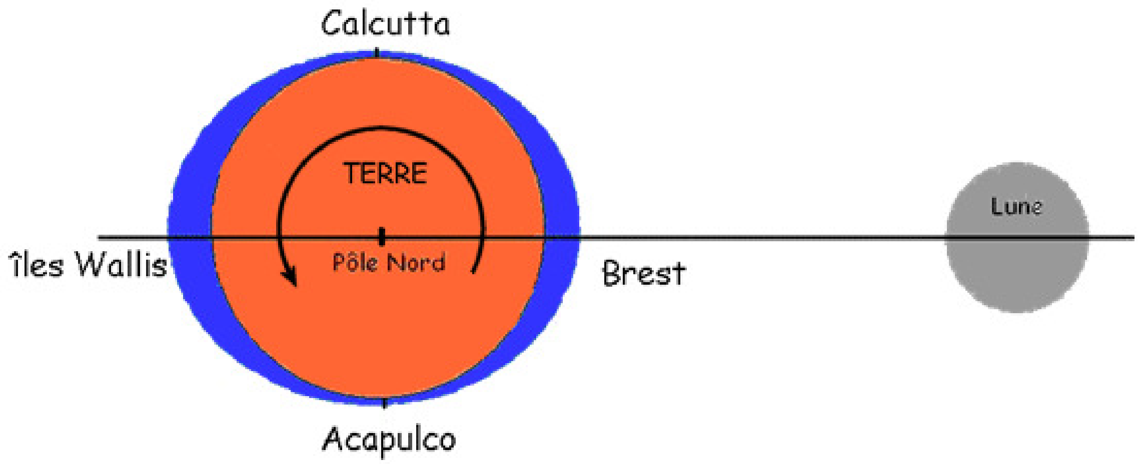
Ce n'est pas beaucoup (près de 10 millions de fois plus petits que le poids de la masse), mais ce sera suffisant pour que certains effets paraissent.

On a fait le calcul à deux endroits à la surface de la planète, mais cette force existe partout dans la planète et à la surface de la planète. Quand on fait ce calcul, on obtient les directions suivantes pour la force de marées à la surface de la planète.



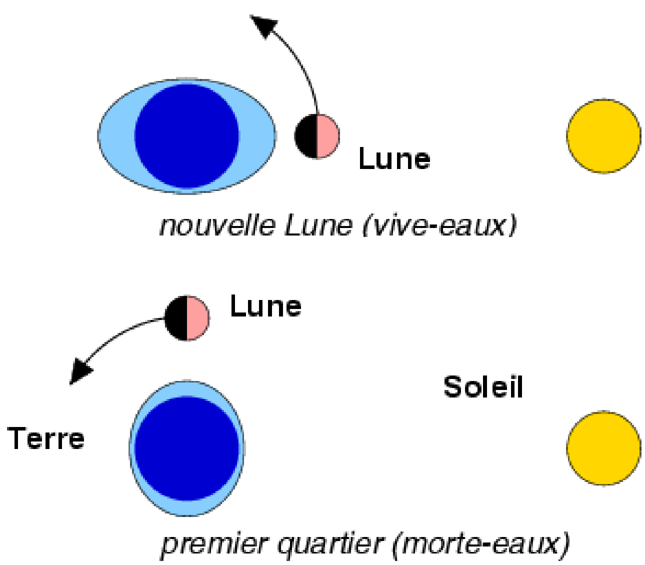
Les changements de niveaux de la mer fait par les forces de marée

L'image précédente nous montre que les forces de marées cherchent à étirer l'objet qui subit les forces de marées dans une direction parallèle à la direction du corps qui fait les forces de marée et à le comprimer dans une direction perpendiculaire. Si le corps est déformable, on pourra voir cet allongement. Pour la Terre, les océans sont facilement déformables et l'eau sera déplacée par ces forces. On voit donc apparaître à la surface de la Terre des régions où l'eau s'accumule et des régions où il y a moins d'eau. On aura alors la situation suivante



Dans cette situation, il y a beaucoup d'eau à Brest et c'est la marée haute à cet endroit. Il y a peu d'eau à Acapulco et c'est la marée basse à cet endroit. Comme la Terre tourne, Acapulco arrivera dans la région où il y a beaucoup d'eau (face à la Lune) dans 6 h puis ira dans l'autre région où il y a peu d'eau 6 h plus tard pour ensuite aller dans l'autre région où il y a beaucoup d'eau (opposée à la Lune) 6 h plus tard pour revenir à la région où il y a peu d'eau une autre 6 h plus tard. En 24 heures, on a donc eu 2 marées hautes et 2 marées basses. (En fait, c'est 24 h et 50 min parce que la Lune tourne autour de la Terre et change donc d'orientation par rapport à la Terre)

En réalité, il n'y a pas que la Lune qui fait des forces de marées sur la Terre. Tous les autres corps célestes du système solaire en font une. En pratique, on peut négliger tous ces corps sauf la Lune et le Soleil, qui fait une force de marée valant environ la moitié de celle faite par la Lune. L'importance de l'accumulation d'eau sera donc bien différente selon l'orientation de la Lune et de la Terre.



Quand la Lune, la Terre et le Soleil sont alignés, les forces de marées faites par la Lune et par le Soleil s'additionnent, ce qui donne une accumulation d'eau importante. Les marées auront alors une amplitude maximale. On parle alors de marée de vives-eaux.

Quand la Lune, la Terre et le Soleil forment un angle de 90° (on dit alors que le Soleil et la Lune sont en quadrature), les forces de marées du Soleil se soustraient à celle de la Lune. Les forces de marées résultantes sont alors plus faibles et les accumulations d'eau sont moins importantes. L'amplitude des marées est donc plus petite et on parle alors de marées de morte-eau.

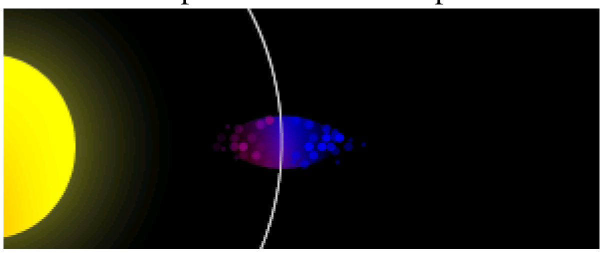
Ensuite, la distance de la Lune n'est pas toujours la même puisque son orbite est elliptique. La distance ne varie que de 7% par rapport à la distance moyenne, mais puisque les effets de marées varient avec le cube de la distance, cela entraîne une variation des forces de marées de près de 20 %. On devrait donc s'attendre à des forces de marées faites par la Lune 20 % plus grande quand la Lune est à son plus près de la Terre. Si cela se produit lors de la pleine Lune ou de la nouvelle Lune, l'amplitude des marées pourra alors être exceptionnelle.

Un calcul plus poussé, tenant compte de la Lune et du Soleil, montre que la variation du niveau de l'eau devrait être au maximum de 50 cm. En réalité, l'amplitude des marées est encore moindre puisque les forces de marée ne font pas que soulever les océans, elles soulèvent aussi la croûte terrestre d'environ 20 cm. Ainsi, si le niveau des mers augmente de 50 cm et que les continents se soulèvent de 20 cm, il ne reste qu'un écart de 30 cm, ce qui en gros l'amplitude maximale des marées dans les océans. Parfois, la forme du rivage va amplifier, par divers mécanismes, cet effet de marée et on peut avoir beaucoup plus d'amplitude. Les plus grandes marées du monde se produisent dans la baie de Fundy, où il peut y avoir une variation de 17 mètres entre la marée basse et la marée haute.


Vous pouvez également voir les changements du niveau de l'eau dans la baie de Fundy dans ces clips.
http://www.youtube.com/watch?v=5W2sM1Ma7YA
http://www.youtube.com/watch?v=u3LtEF9WPt4

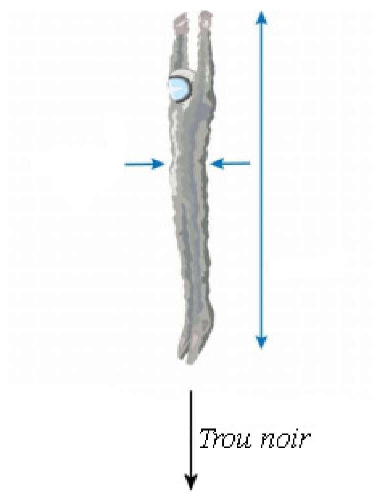
La limite de Roche

Il est à noter que les forces de marées augmentent très rapidement lorsque la distance entre les objets diminue. Ainsi, il peut arriver que les forces de marées sur une masse à la surface d'une planète excèdent le poids de cette masse si la planète est trop près de l'astre



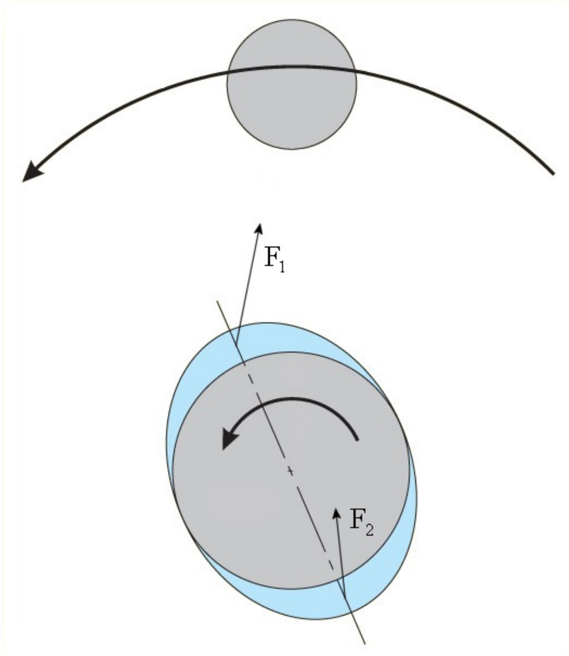
qui fait les forces de marées. Dans ce cas, la matière se soulèvera de la surface de la planète et cette dernière se détruira. Ainsi, tout satellite dont le rayon orbital est inférieur à 2,4 fois le rayon de la planète centrale (si la planète et le satellite ont la même densité) sera détruit. C'est ce qu'on appelle la *limite de Roche*. De même, les poussières se situant à l'intérieur de la limite de Roche ne pourront s'agglomérer pour former un satellite parce que les forces de marée seront plus grandes que les forces d'attraction entre les poussières. C'est ce qui se passe dans les anneaux de Saturne.

Les forces de marées peuvent devenir encore plus fortes dans des régions où le champ gravitationnel varie très rapidement. Près d'un trou noir, les forces sont si grandes qu'elles détruiraient tous les astronautes qui s'approcheraient trop près du trou noir. Comme les forces cherchent à étirer l'objet dans un sens et à compresser l'objet dans l'autre, l'astronaute va s'étirer et s'amincir sous l'effet des forces. C'est ce qu'on a appelé la « spaghettification »



Les effets à long terme des forces de marée

La rotation de la Terre sur elle-même a pour effet d'entraîner avec elle les deux bosses faites par les forces de marées. Ainsi, les deux bosses de marées ne sont pas directement en ligne avec la Lune, mais décalées d'environ 3^o par rapport à la direction de la Lune. Regardons l'attraction gravitationnelle faite par la Lune sur ces bosses de marées



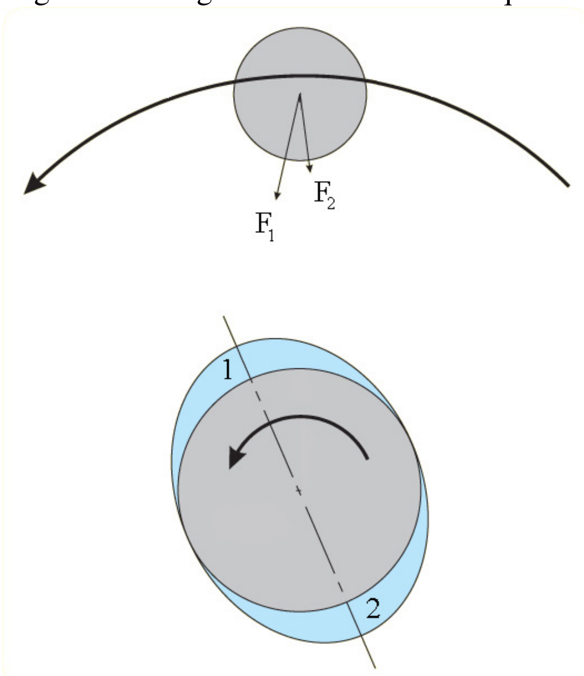
Chacune de ces forces fait un moment de force sur la Terre, mais le moment de force sur la bosse du côté de la Lune est plus important parce que la force y est plus grande puisque cette bosse est plus près de la Lune. Les deux moments de force ne s'annulent donc pas et il reste un petit moment de force qui s'exerce sur la Terre. Ce moment de force s'oppose à la rotation de la Terre et ralentit donc lentement cette rotation. Le changement n'est pas très important, puisqu'actuellement le jour s'allonge d'environ 2 ms par siècle, mais à l'échelle géologique, cela peut représenter une variation considérable, surtout que l'effet était un peu plus important auparavant. Comme l'effet est cumulatif, on peut ainsi calculer que le 20^e siècle a duré environ 0,1 seconde de plus que le 19^e siècle. Lors de la formation de la Terre il y a 4 milliards d'années, le jour avait alors une durée d'environ 15 heures. Il y a 380 millions d'années, le jour durait 22 heures et il est maintenant de 24 heures. Le jour continuera ainsi à s'allonger et atteindrait une durée de 47 jours dans 50 milliards d'années (mais cela ne se produira pas puisque la Terre et la Lune seront détruites par le Soleil dans 5 milliards d'années).

Le même phénomène s'est produit sur la Lune, mais avec plus d'intensité. Même s'il n'y a pas d'eau sur la Lune, il y a quand même des bosses de marées qui peuvent être faites par un soulèvement du sol, spécialement à l'époque où la Lune n'était pas encore solidifiée. Il se produit alors le même phénomène qu'il se produit sur la Terre : un ralentissement de la rotation. Les forces de marées sur la Lune exercées par la Terre sont un peu plus petites que celles faites par la Lune sur la Terre, mais il est beaucoup plus facile d'arrêter la rotation de la Lune, car son moment d'inertie est nettement plus petit. Le ralentissement de la rotation de la Lune s'est donc fait à un rythme nettement plus rapide que celui de la Terre, à tel point que la Lune est finalement arrivée à ce que tentent de faire les forces de marées : arrêter la rotation par rapport à l'autre corps. C'est pour ça que la Lune a toujours la même face tournée vers la Terre.

Ce phénomène est assez courant, les quatre plus gros satellites de Jupiter ont également toujours la même face tournée vers Jupiter. C'est la position d'équilibre à atteindre et, si on dispose de suffisamment de temps, tous les systèmes à deux corps finiront par avoir toujours les mêmes faces tournées l'un vers l'autre. Le seul exemple connu dans lequel les deux corps ont atteint cette position d'équilibre est le système de Pluton et de son satellite Charron. Les prochains à le faire dans le système solaire devraient en théorie être la Terre et la Lune.

Si l'orbite est elliptique, il peut se produire des situations légèrement différentes. Mercure, la planète subissant les plus grandes forces de marée faites par le Soleil, n'a pas toujours la même face tournée vers le Soleil. La période de rotation sur elle-même est exactement les deux tiers de la période de révolution autour du Soleil. Ainsi, deux points opposés sur Mercure alternent pour être en direction du Soleil au périhélie.

Si la Lune exerce une force sur les bosses de marées, alors les bosses de marées exercent aussi une force sur la Lune. Une bonne partie de cette force est dirigée vers la Terre et contribue à faire la force centripète, mais il reste cependant une petite composante tangentielle dirigée dans le même sens que le mouvement de la Lune autour de la Terre.

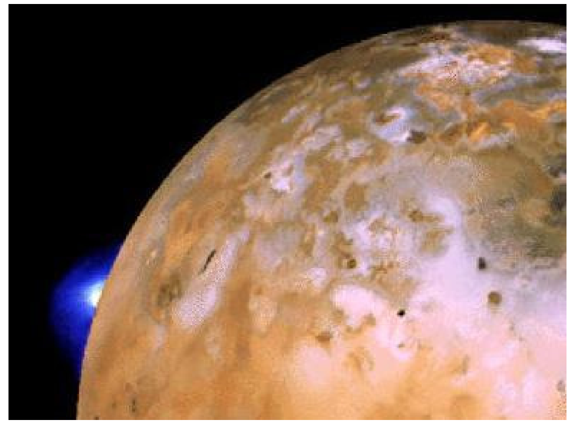


Cette force accélère la Lune et lui permet de gagner de l'énergie. La Lune peut donc s'éloigner lentement de la Terre, à un rythme de 3 à 4 cm par année. Le rayon de l'orbite de la Lune augmente continuellement ce qui a pour effet d'augmenter la durée du mois. Ce processus se poursuivra jusqu'à ce que la période de révolution de la Lune autour de la Terre atteigne une durée de 47 jours dans 50 milliards d'années.

Si la période du satellite est plus petite que la période de rotation de la planète, les deux effets des forces de marées sont dans le sens contraire : la planète tournera de plus en plus vite et le satellite se rapprochera de la planète jusqu'à s'écraser sur elle. C'est ce qui se produit actuellement avec le plus gros des satellites de Mars, Phobos.

Les forces de marées dissipent beaucoup d'énergie. Dans le cas de la Terre, beaucoup de friction est engendrée par les mouvements des océans et des continents ce qui dégage beaucoup de chaleur. Cette énergie est responsable d'environ 2% de la chaleur interne de la Terre (estimé à 2×10^{19} J par an comparativement à 10^{21} J par an pour les désintégrations radioactives). Cette contribution devait être plus importante dans le passé puisque la Lune était plus près. L'énergie interne obtenue par les forces de marées est cependant plus importante dans le cas des satellites bien qu'elle diminue beaucoup une fois que le satellite atteint sa position d'équilibre en ayant toujours la même face tournée vers la planète. Les forces de marées ne chauffent donc que très peu l'intérieur de la Lune en ce moment, contrairement à ce qui se passait avant que la Lune ne nous présente toujours la même face.

Dans le cas des satellites de Jupiter, on pourrait s'attendre à ce que les forces de marées chauffent peu les satellites puisqu'ils ont tous atteint la situation d'équilibre. Mais dans ce cas, il y a quatre gros satellites et les perturbations entre ces satellites font qu'il peut y avoir certains mouvements. Au lieu d'avoir exactement toujours la même face vers Jupiter, les perturbations des autres satellites peuvent entraîner des oscillations autour de cette position d'équilibre. Avec le mouvement d'oscillation, les forces de marée provoquent des déformations du satellite qui génère beaucoup de friction. Il n'est donc pas très surprenant que Io, le satellite le plus près de Jupiter et donc celui qui subit les effets de marées les plus intenses, soit chauffé par la friction engendrée par les forces de marées au point d'avoir des volcans à sa surface.



Résumé

Première loi de Kepler

Les orbites sont des ellipses. La masse centrale occupe un des foyers.

r_A et r_p en fonction de a et e

$$r_a = a(1+e)$$
$$r_p = a(1-e)$$

a et e en fonction de r_A et r_p

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} \qquad e = \frac{r_a - r_P}{r_a + r_p}$$

Deuxième loi de Kepler

$$mrv\sin\theta = \text{constante}$$

Vitesse à l'apoapside

$$v_A^2 = \frac{2GM}{r_p + r_A}\frac{r_p}{r_A} \qquad \text{ou} \qquad v_A^2 = \frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

Vitesse à la périapside

$$v_P^2 = \frac{2GM}{r_P + r_A}\frac{r_A}{r_P} \qquad \text{ou} \qquad v_P^2 = \frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}$$

Période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad \text{ou} \quad T = \pi\sqrt{\frac{\left(r_p + r_A\right)^3}{2GM}}$$

Énergie mécanique

$$E_{mec} = -\frac{GMm}{2a} \qquad \text{ou} \qquad E_{mec} = -\frac{GMm}{r_p + r_A}$$

Force sur un objet de masse *m* dans un champ gravitationnel

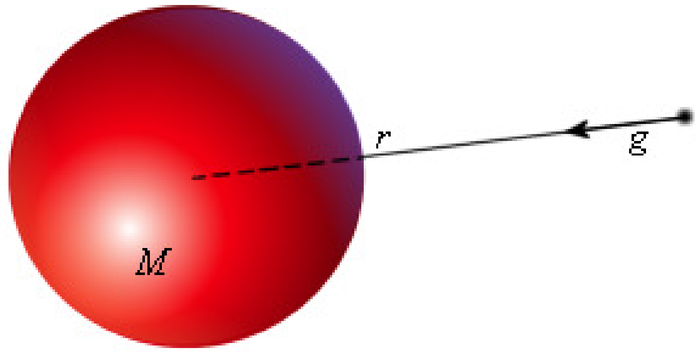
$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Grandeur du champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M*

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

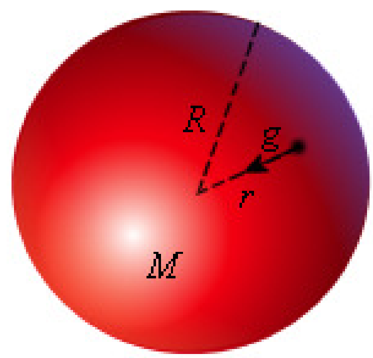
Champ gravitationnel à l'extérieur d'une sphère

$$g = \frac{GM}{r^2}$$



Champ gravitationnel à l'extérieur d'une sphère de densité constante

$$g = \frac{GMr}{R^3}$$



Force de gravitation entre deux sphères

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Force de marées

$$F_{marées} = \frac{2GMmR}{r^3}$$

Exercices

Section 14.1 Les orbites elliptiques

Chapitre 13 du Benson :
Faire les exercices 20, 22, 23, 24, 25, 29

Section 14.3 Le champ gravitationnel

Chapitre 13 du Benson :
Faire les exercices 9, 11, 13, 15, 16, 3, 4, 5, 6, 7a