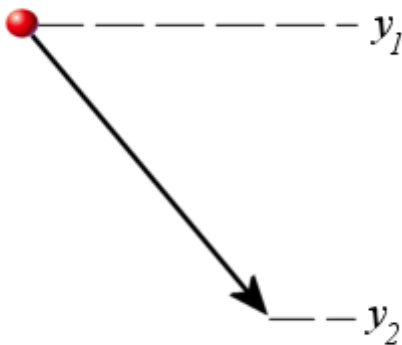


9 L'énergie mécanique

En développant un peu plus les idées obtenues au chapitre précédent, nous allons arriver à une méthode encore plus efficace pour résoudre des problèmes.

9.1 L'énergie gravitationnelle

Le travail fait par la force de gravitation



Supposons qu'on déplace un objet d'une position 1 à une position 2 tel qu'illustré sur la figure. Calculons le travail fait par la force de gravitation.

$$\begin{aligned}W_g &= \vec{F}_g \cdot \vec{\Delta s} \\ &= F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z\end{aligned}$$

Avec des axes orientés de façon conventionnelle (y vers le haut), les composantes x et z de la force sont nulles. Il ne reste que

$$\begin{aligned}W_g &= F_y \Delta y \\ &= -mg \Delta y \\ &= -mg (y_2 - y_1) \\ &= -(mgy_2 - mgy_1)\end{aligned}$$

On remarque que le travail fait par la force de gravitation entre les points 1 et 2 est lié à la variation d'une quantité. On va appeler cette quantité l'énergie gravitationnelle et on la notera U_g .

Énergie gravitationnelle (U_g)

$$U_g = mgy$$

(On parle parfois d'énergie *potentielle* gravitationnelle, mais le terme *potentielle* est tout à fait inutile, il est un reliquat d'une vieille classification de l'énergie faite au début des années 1850 et qui n'est même plus utilisée. Nous reviendrons sur ce point plus tard.)

On obtient alors

$$\begin{aligned} W_g &= -(mgy_2 - mgy_1) \\ &= -(U_{g2} - U_{g1}) \end{aligned}$$

Pour obtenir finalement

Le travail fait par la force de gravitation

$$W_g = -\Delta U_g$$

On obtient ainsi une façon très rapide de calculer le travail fait par la force de gravitation. Même si sur notre dessin, la trajectoire entre les points 1 et 2 était une ligne droite, cette formule est valide peu importe la forme de la trajectoire. Nulle part dans notre démonstration nous avons supposé une forme pour la trajectoire. Cela signifie que cette façon de calculer le travail est valide peu importe la forme de la trajectoire entre les 2 points.

Remarquez qu'on aurait très bien pu définir une énergie gravitationnelle valant

$$U_g = mgy + \text{constante}$$

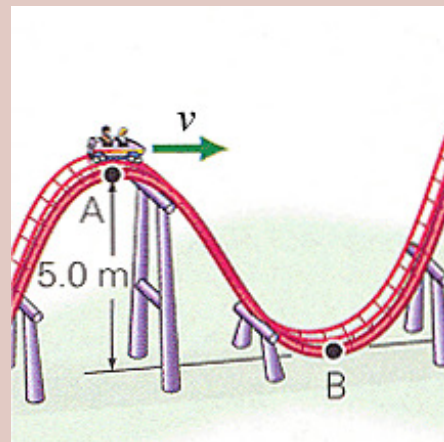
Ce qui aurait donné exactement les mêmes résultats, car la seule chose qui importe pour calculer le travail, c'est la variation de l'énergie. En calculant la variation, les constantes se seraient annulées et on aurait obtenu les mêmes résultats. Or, l'ajout de cette constante a exactement le même effet que de rendre le choix de $y = 0$ arbitraire. Nous devons donc choisir, à chaque problème, où on place le $y = 0$.

Exemple

Exemple 9.1.1

Un chariot de montagne russe (ayant une masse de 1000 kg, incluant les occupants) descend une pente telle qu'illustrée sur la figure. Quel est le travail fait par la force de gravitation sur le chariot quand il passe du point A au point B?

On doit choisir notre $y = 0$ pour commencer. Disons qu'on le met au sol.



L'énergie gravitationnelle au point A est

$$U_{gA} = mgy_A = 1000\text{kg} \times 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \times 5\text{m} \\ = 49000\text{J}$$

L'énergie gravitationnelle au point B est

$$U_{gB} = mgy_B = 1000\text{kg} \times 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \times 0\text{m} = 0\text{J}$$

Le travail est donc

$$W_g = -\Delta U_g = -(U_{gB} - U_{gA}) = -(0\text{J} - 49000\text{J}) = 49000\text{J}$$

Si on avait mis le $y = 0$ au point A, on aurait eu $U_{gA} = 0\text{J}$ et $U_{gB} = -49\,000\text{J}$. La variation d'énergie gravitationnelle aurait donc été la même.

Ce calcul, relativement facile, aurait été assez compliqué avec $W = F \Delta s \cos \theta$ parce l'angle entre la force et le déplacement aurait continuellement changé durant la descente. En effet, la descente ne se fait pas en ligne droite, mais plutôt en suivant une courbe d'inclinaison variable, ce qui fait que l'angle change constamment. Le calcul de travail aurait donc dû être fait avec une intégrale alors qu'une simple soustraction a suffi ici.

9.2 Peut-on le faire pour d'autres forces?

Forces conservatrices

Si on est parvenu à simplifier grandement le calcul du travail fait par la force gravitationnelle en définissant une énergie gravitationnelle, peut-on le faire pour toutes les forces? Cela nous permettrait de trouver le travail avec l'énergie à partir du lien général entre l'énergie et le travail qui est

Le travail à partir de l'énergie

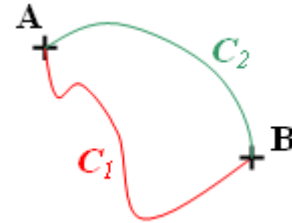
$$W = -\Delta U$$

Malheureusement, il existe une énergie pour seulement quelques forces. Pour beaucoup de forces, il est impossible de calculer le travail à l'aide d'une énergie. On a donc la situation suivante :

- 1) Forces pour lesquelles on peut calculer le travail avec une énergie : Forces conservatrices.

2) Forces pour lesquelles on ne peut pas calculer le travail avec une énergie :
Forces non conservatrices

Comment reconnaître qu'une force est conservatrice? Conceptuellement, ce sont les forces pour lesquelles le travail ne dépend pas de la trajectoire pour passer d'un endroit à un autre. Si on passe du point A au point B et qu'on calcul le travail en passant par plusieurs chemins entre les points A et B (comme les chemins C1 et C2 ici), la force est conservatrice si on obtient la même valeur pour tous les chemins.



Une formulation équivalente consiste à calculer le travail fait par une force quand un déplace un objet le long d'une trajectoire et qu'on revient au point de départ (comme sur la figure de gauche). Si le travail est toujours nul, peu importe la trajectoire utilisée, alors la force est conservatrice.



C'est bien beau tout ça, mais en pratique, c'est assez difficile avec cette méthode de prouver qu'une force est conservatrice. Même si on a calculé le travail en passant par 1000 trajectoires et que ça donne toujours la même chose, rien ne nous garantit qu'on obtiendra la même réponse pour la 1001^e trajectoire. Comme il y a une infinité de trajectoires possible, on ne pourrait donc jamais être sûr que la force est conservatrice!

Rassurez-vous, les mathématiciens ont développé plusieurs outils permettant de vérifier si toutes les trajectoires donnent le même résultat. Par exemple, une force est conservatrice si les trois conditions suivantes sont respectées.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Nous ne ferons pas toutes ces vérifications avec les forces utilisées dans ces notes, nous allons simplement donner le résultat de ces vérifications.

Ainsi, les forces suivantes sont non conservatrices

- La normale
- La tension
- La friction

et les forces suivantes sont conservatrices

- La force de gravitation
- La force faite par un ressort
- La force électrique

On peut donc trouver l'énergie pour ces forces conservatrices. On sait déjà la formule pour l'énergie gravitationnelle et on examinera l'énergie électrique seulement dans le cours d'électricité et magnétisme. Il ne reste donc qu'à trouver l'énergie du ressort.

L'énergie du ressort

On sait déjà que si un objet sur lequel un ressort exerce une force se déplace de x_2 à x_1 , le travail fait par un ressort est

$$W_R = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$W_R = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

Or, ce travail est aussi

$$\begin{aligned} W_R &= -\Delta U_R \\ W_R &= -(U_{R2} - U_{R1}) \end{aligned}$$

Il est ensuite facile de comparer ces deux résultats pour se rendre compte que les deux équations du travail sont équivalentes si

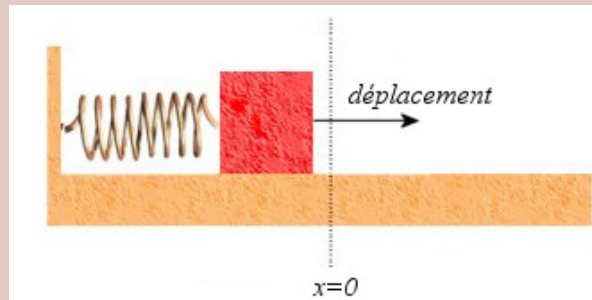
Énergie d'un ressort (U_R)

$$U_R = \frac{1}{2}kx^2$$

Ici aussi, on aurait pu ajouter une constante à la valeur de l'énergie. Toutefois, il n'y a aucun intérêt à faire cela ici. La constante ne permettrait même pas de rendre la position du $x = 0$ arbitraire (parce que x est au carré ici). Le $x = 0$ doit donc être à la position où le ressort n'est ni étiré, ni comprimé.

Exemple 9.2.1

Un ressort ayant une constante de 120 N/m est fixé à un bloc de 5 kg. Quel est le travail fait par le ressort sur le bloc quand le ressort passe d'une compression de 3 cm à un étirement de 1 cm?



L'énergie initiale du ressort est de

$$U_{R1} = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} 120 \frac{\text{N}}{\text{m}} (0,03\text{m})^2 = 0,054\text{J}$$

L'énergie finale du ressort est

$$U_{R2} = \frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{2} 120 \frac{\text{N}}{\text{m}} (0,01\text{m})^2 = 0,006\text{J}$$

Le travail est donc

$$W_R = -\Delta U_R = -(0,006\text{J} - 0,054\text{J}) = 0,048\text{J}$$

9.3 La conservation de l'énergie mécanique**Preuve du principe de conservation**

Examinons ce qui arrive s'il n'y a que des forces conservatrices qui font un travail sur un objet. Nous aurons alors

$$W_{net} = -\Delta U$$

où U représente la somme des énergies de toutes les forces conservatrices. On obtient le travail net, car toutes les forces présentes sont dans notre U et qu'on calcule donc la somme de tous les travaux agissant sur le corps, ce qui est le travail net.

On sait aussi, selon le chapitre précédent, que

$$W_{net} = \Delta E_k$$

En jumelant c'est deux équations, on trouve que

$$-\Delta U = \Delta E_k$$

Pour arrivé à

$$\Delta E_k + \Delta U = 0$$

$$\Delta(E_k + U) = 0$$

Avec la définition suivante :

Énergie mécanique (E_{mec})

$$E_{mec} = E_k + U$$

On a alors

$$\Delta E_{mec} = 0$$

ou encore

$$E_{mec2} - E_{mec1} = 0$$

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

Ce qui nous donne le principe suivant

Principe de conservation de l'énergie mécanique

$$\Delta E_{mec} = 0$$

ou

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

ou

$$E_{mec} = \text{constante}$$

On parle de conservation quand quelque chose reste identique. C'est le cas ici, puisqu'on peut voir, selon la deuxième équation, que la valeur de l'énergie mécanique reste pareille. La première équation nous dit que la variation de l'énergie est nulle, ce qui est une autre façon de dire qu'elle ne change pas.

Rappelez-vous cependant cette restriction :

Le principe de conservation de l'énergie mécanique n'est valide que si le travail est fait uniquement par des forces conservatrices.

On comprend tout à coup d'où vient l'expression forces non conservatrice. S'il y a une force non conservatrice qui fait un travail, l'énergie mécanique n'est pas conservée.

Méthode de résolution

On peut maintenant appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique pour résoudre des problèmes. La méthode est relativement simple.

- 1) On trouve l'énergie à un certain moment.
- 2) On trouve l'énergie à un autre moment.
- 3) On égalise ces deux énergies puisque l'énergie est conservée.
- 4) On résout cette équation.

Notez que pour appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique, il ne doit pas y avoir de forces non conservatrices qui font un travail. Il peut y avoir des forces non conservatrices, mais elles ne doivent pas faire de travail.

La formule de l'énergie d'un système

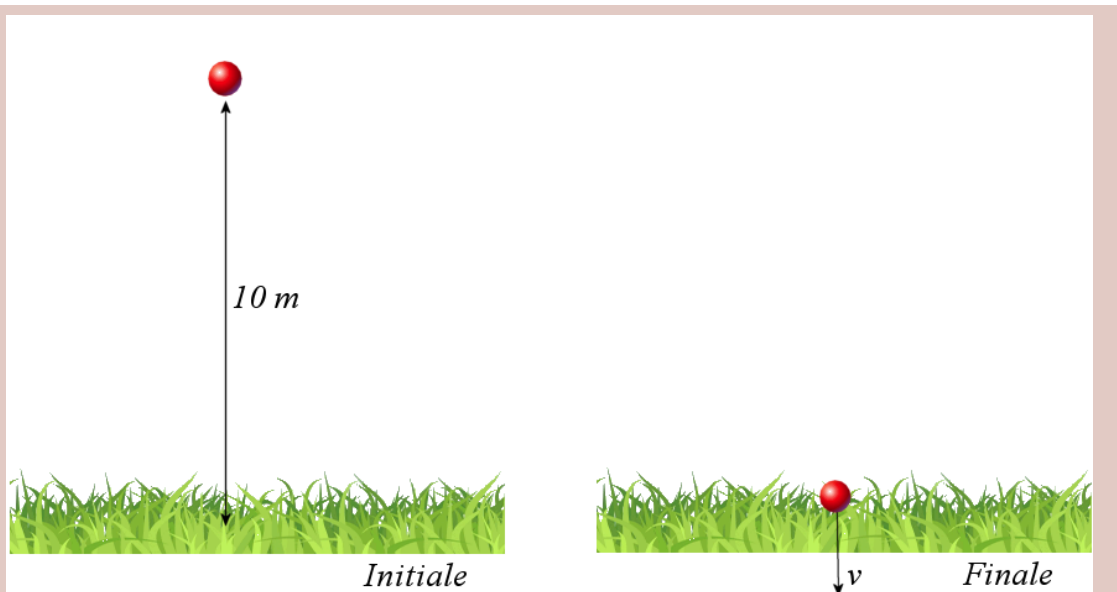
Pour faire la formule de l'énergie, les règles sont assez simples, car il n'y a pas énormément de forces conservatrices. Il n'y a que l'énergie cinétique, les énergies gravitationnelles et l'énergie des ressorts. Les règles pour faire la formule de l'énergie mécanique sont donc

- 1) $\frac{1}{2}mv^2$ pour chaque objet du système.
- 2) mgy pour chaque objet du système.
- 3) $\frac{1}{2}kx^2$ pour chaque ressort dans le système.

Comme le nombre d'objet et de ressort ne change pas d'un moment à l'autre, cela signifie que la formule pour calculer l'énergie au moment 1 est exactement la même que la formule pour calculer l'énergie au moment 2.

Exemple 9.3.1

Un objet de 5 kg tombe en chute d'une hauteur de 10 m avec une vitesse initiale nulle. À quelle vitesse va-t-il frapper le sol?



Initialement, l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned}
 E_{mec1} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\
 &= 0 + 5kg \times 9,8 \frac{N}{kg} \times 10m \\
 &= 490J
 \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au niveau du sol. On ne peut plus le changer par la suite.

L'énergie, juste avant que la balle ne frappe le sol, est

$$\begin{aligned}
 E_{mec2} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\
 &= \frac{1}{2}mv^2 + 0J
 \end{aligned}$$

Il faut prendre la vitesse juste avant qu'elle frappe le sol parce que dès que la balle frappe le sol, il y aura une force normale qui va faire un travail sur la balle. Comme la normale n'est pas une force conservatrice, l'énergie mécanique de la balle cessera d'être conservée dès que la balle touche le sol.

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

$$490J = \frac{1}{2}mv^2$$

$$490J = \frac{1}{2}5kg \times v^2$$

$$v = 14 \frac{m}{s}$$

La balle frappe donc le sol à 14 m/s. Remarquez que ce n'est pas la seule façon de faire ce problème. On aurait pu le faire avec ce qu'on a appris au chapitre 1 et on aurait obtenu le même résultat.

Une démonstration du principe de conservation de l'énergie mécanique

En s'inspirant de l'exemple précédent, on peut maintenant présenter une démonstration expérimentale du principe de conservation de l'énergie mécanique. Selon ce principe, si une masse descend d'une certaine hauteur, l'énergie gravitationnelle baisse, ce qui va faire monter l'énergie cinétique. La trajectoire de l'objet n'a, en fait, aucune importance. Si un objet de 1 kg descend de 1 m, l'énergie gravitationnelle baisse de 9,8 J et l'énergie cinétique augmente de 9,8 J, peu importe la trajectoire. Cela veut dire que, peu importe la trajectoire, un objet initialement au repos gagnera la même vitesse s'il descend d'une certaine distance.

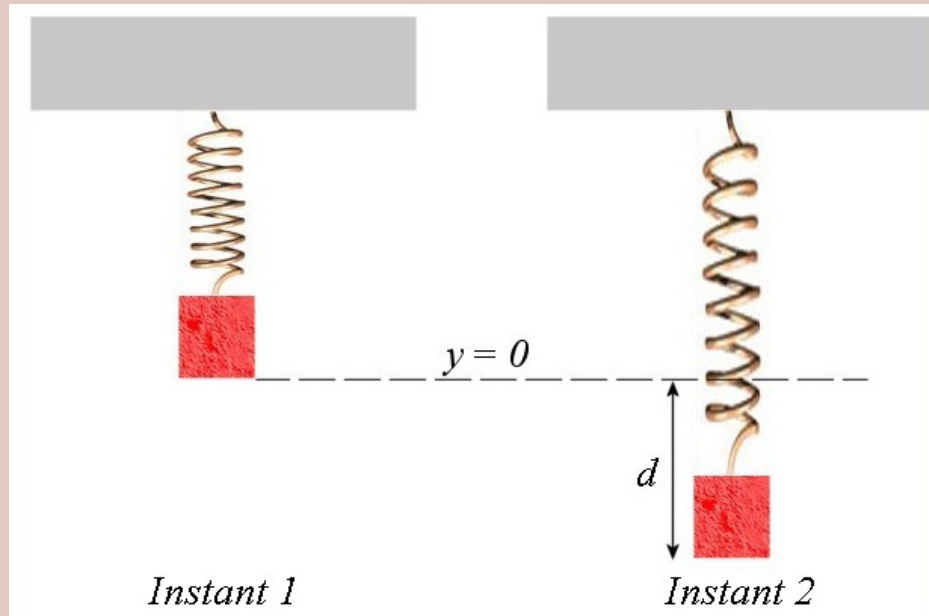
Dans l'expérience présentée ici, on laisse premièrement tomber une boule directement vers le bas et on mesure sa vitesse au point le plus bas à l'aide d'un laser. En fait, l'appareil mesure le temps que prend la boule pour traverser le laser. Plus ce temps est petit, plus la boule va vite. Ensuite, on laisse descendre une autre boule identique en suivant un arc de cercle en l'attachant avec une corde. Au point le plus bas de ce mouvement de pendule, on s'assure que la masse est descendue de la même hauteur que la balle qu'on a laissé tomber directement vers le bas. On mesure alors le temps de passage, donc sa vitesse. Sera-t-elle identique comme le prévoit la conservation de l'énergie mécanique?

<http://www.youtube.com/watch?v=L2mdAvdPhT4>

Exemple 9.3.2

Un bloc de 2 kg est suspendu au plafond par un ressort ayant une constante de 10 N/m. Initialement, le ressort n'est pas étiré ni comprimé et le bloc a une vitesse nulle. Si on laisse tomber le bloc, quel sera ...

a) l'étirement maximal du ressort?



Comme le système est composé d'une masse et d'un ressort, l'énergie à l'instant 1 est

$$\begin{aligned} E_{mec1} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + 0J \\ &= 0J \end{aligned}$$

On a placé notre $y = 0$ à la position initiale de la masse.

Dans la configuration à l'instant 2, la masse est descendue d'une distance d . Comme on est à l'étirement maximal, cela signifie que la vitesse de la masse est nulle. L'énergie à ce moment est donc

$$\begin{aligned} E_{mec2} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + mg(-d) + \frac{1}{2}kd^2 \\ &= 19,6N(-d) + 5\frac{N}{m}d^2 \end{aligned}$$

En égalant les énergies, on obtient

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

$$0J = 19,6N(-d) + 5\frac{N}{m}d^2$$

On peut résoudre cette équation pour obtenir $d = 0$ et $d = 3,92$ m. En fait, on obtient un peu plus que ce qu'on voulait. Comme on a imposé que la vitesse est nulle pour E_{mec2} , nous avons trouvé tous les endroits où la vitesse est nulle. C'est pour ça qu'on retrouve la position initiale ($d = 0$) puisque la masse avait alors une vitesse nulle. Notre autre réponse est la réponse qu'on cherche : un étirement du ressort de 3,92 m.

b) la vitesse du bloc quand le ressort est étiré de 1 m?

Quand le ressort est étiré d'un mètre, l'énergie du système est

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + 2kg \times 9,8\frac{N}{kg}(-1m) + \frac{1}{2}10\frac{N}{m}(1m)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - 19,6J + 5J$$

En égalant cette énergie à l'énergie à l'instant 1, on a

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

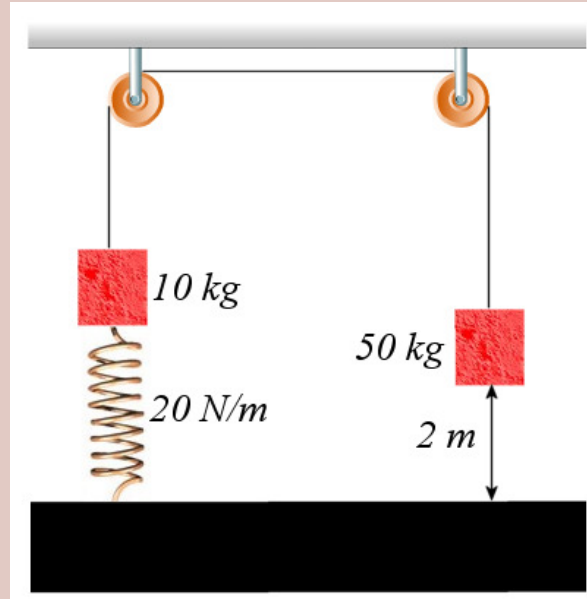
$$0J = \frac{1}{2}mv^2 - 19,6J + 5J$$

$$14,6J = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = 3,82\frac{m}{s}$$

Exemple 9.3.3

On laisse tomber le bloc de 50 kg dans le système suivant initialement au repos. Au départ, le ressort n'est ni étiré, ni comprimé. Quelle sera la vitesse du bloc de 50 kg juste avant de frapper le sol?



Ce système est composé de 2 blocs et de 1 ressort. La formule de l'énergie sera donc

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Pour calculer l'énergie gravitationnelle, on doit choisir un $y = 0$. On pourrait choisir de le placer au sol, mais il semble que ce sera difficile de déterminer la hauteur du bloc de 10 kg par rapport à ce $y = 0$ parce qu'on ne sait pas la hauteur initiale de ce bloc par rapport au sol. La beauté de l'énergie gravitationnelle, c'est qu'**on peut choisir un $y = 0$ différent pour chaque bloc!** Nous allons ici prendre des $y = 0$ correspondant à la position initiale de chaque bloc.

L'énergie initiale est donc

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}m_1\left(0\frac{m}{s}\right)^2 + m_1g(0m) + \frac{1}{2}m_2\left(0\frac{m}{s}\right)^2 + m_2g(0m) + \frac{1}{2}k(0m)^2$$

$$E_{mec1} = 0J$$

L'énergie juste avant que le bloc de 50 kg ne frappe le sol est

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}m_1v^2 + m_1g(2m) + \frac{1}{2}m_2v^2 + m_2g(-2m) + \frac{1}{2}k(2m)^2$$

La hauteur du bloc 1 (celui de 10 kg) est maintenant de 2 m, car il monte de 2 m si le bloc 2 (celui de 50 kg) descend de 2 m. L'étirement du ressort est aussi de 2 m si le

bloc 1 monte de 2 m. On a également mis la même vitesse pour les deux blocs, car si le bloc 2 descend à une certaine vitesse, le bloc 1 n'a pas le choix de monter à la même vitesse puisqu'ils sont reliés par une corde.

On a donc

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}m_1v^2 + m_1g(2m) + \frac{1}{2}m_2v^2 + m_2g(-2m) + \frac{1}{2}k(2m)^2$$

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}10kg \times v^2 + 10kg \times 9,8 \frac{N}{kg} \times (2m) + \frac{1}{2}50kg \times v^2 + 50kg \times 9,8 \frac{N}{kg} \times (-2m) + \frac{1}{2}20 \frac{N}{m} \times (2m)^2$$

$$E_{mec2} = 5kg \times v^2 + 196J + 25kg \times v^2 + -980J + 40J$$

$$E_{mec2} = 30kg \times v^2 - 744J$$

En égalant les deux énergies, on a

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

$$0J = 30kg \times v^2 - 744J$$

$$v = 4,98 \frac{m}{s}$$

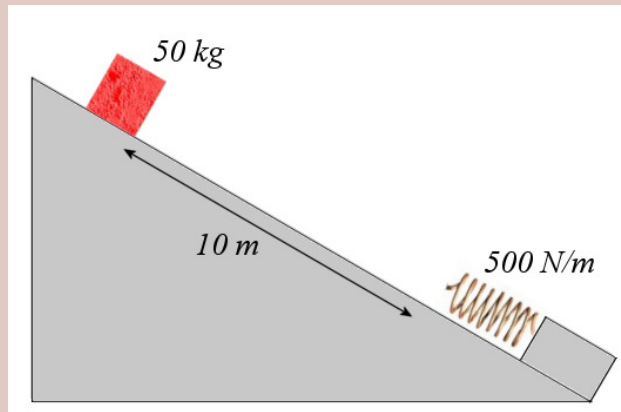
Une remarque s'impose ici. Dans ce système, il y a des forces de tension sur les blocs et comme la force de tension n'est pas une force conservatrice, on peut se demander s'il était légitime d'utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique.

En fait, c'était correct, car le travail net fait par les forces de tension est nul. La tension tire sur le bloc de 10 kg vers le haut et le bloc se déplace vers le haut sur une distance de 2 m. La tension tire également sur le bloc de 50 kg vers le haut et le bloc se déplace vers le bas sur une distance de 2 m. Comme les tensions et les distances sont les mêmes, les travaux ont la même grandeur sauf que celui sur le bloc de 10 kg est positif et celui sur le bloc de 50 kg est négatif. Quand on additionne ces deux travaux pour obtenir le travail net fait par la force de tension, le résultat est nul et on peut donc appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique.

En fait, dès qu'il y a une corde qui relie deux objets du système et que la corde n'étire pas, les travaux faits par la tension vont toujours s'annuler. La présence de tension dans ces cas ne vient donc pas invalider l'application du principe de conservation de l'énergie mécanique.

Exemple 9.3.4

Un bloc de 50 kg initialement au repos glisse le long d'une pente inclinée de 30° . Il n'y a pas de friction entre le bloc et la pente. 10 m plus bas, il y a un ressort ayant une constante de 500 N/m. Quelle sera la compression maximale du ressort quand le bloc va foncer dans le ressort?



Comme ce système est composé d'une masse et d'un ressort, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

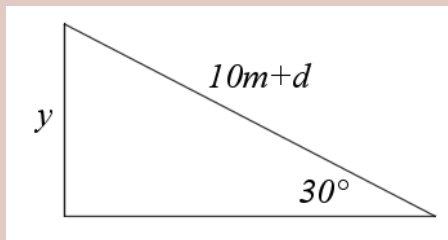
Pour calculer l'énergie gravitationnelle, il faut choisir notre $y = 0$. Prenons la position initiale du bloc comme $y = 0$. L'énergie mécanique initiale est donc

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}m\left(0\frac{m}{s}\right)^2 + mg(0m) + \frac{1}{2}k(0m)^2$$

$$E_{mec1} = 0J$$

Examinons maintenant quelle sera l'énergie mécanique quand le ressort sera comprimé au maximum. On appellera d cette distance de compression maximale. On sait alors que la vitesse du bloc sera nulle à la compression maximale. Il ne reste qu'à trouver la hauteur du bloc à ce moment. Le bloc a alors parcouru $10\text{ m} + d$ le long de la pente et on trouve de combien il est descendu avec le triangle suivant. La descente est donc de



$$\sin 30^\circ = \frac{y}{10m+d}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{10m+d}$$

$$y = \frac{10m+d}{2}$$

On a donc, comme énergie quand le ressort est comprimé au maximum,

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}m\left(0\frac{m}{s}\right)^2 + 50kg \times 9,8\frac{N}{kg} \times \left(-\frac{10m+d}{2}\right) + \frac{1}{2}500\frac{N}{m}(d)^2$$

$$E_{mec2} = -50kg \times 9,8\frac{N}{kg} \times 5m - 50kg \times 9,8\frac{N}{kg} \times \frac{d}{2} + \frac{1}{2}500\frac{N}{m}(d)^2$$

$$E_{mec2} = -2450J - 245N \times d + 250\frac{N}{m} \times d^2$$

En égalant cette énergie avec l'énergie initiale, on trouve la compression

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

$$0J = -2450J - 245N \times d + 250\frac{N}{m} \times d^2$$

Si on résout cette équation quadratique, on obtient $d = 3,659$ m

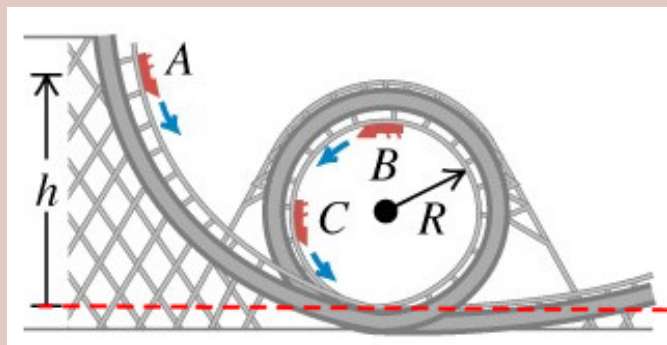
(Il y a une autre réponse, qui est négative, qu'on rejette ici, car elle correspond à un étirement du ressort. Cette réponse a quand même une signification : elle nous donne l'allongement maximal qu'aura le ressort quand la masse va rebondir sur le ressort si la masse reste toujours fixée au ressort. Si la masse ne reste pas fixée au ressort, la masse va remonter jusqu'à sa position initiale.)

Encore une fois, il y a une force non conservatrice dans cet exemple puisqu'il y a une normale qui agit sur le bloc. Toutefois, cette normale ne fait aucun travail parce qu'elle agit perpendiculairement à la pente et que le bloc se déplace parallèlement à la pente. Cela veut dire qu'il y a 90° entre la force et le déplacement et que la force ne fait aucun travail. On peut donc appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique puisqu'aucune force non conservatrice ne fait de travail.

Exemple 9.3.5

Un chariot de montagne russe initialement au repos au sommet d'une pente descend la pente pour ensuite passer dans une boucle telle qu'illustrée sur la figure. Le rayon de la boucle est de $R = 25$ m.

- a) Si la hauteur initiale h du chariot est de 100 m, quelle est la vitesse de chariot au point le plus haut de la boucle (B)?



Comme il y a un seul objet (le chariot) dans cet exemple, la formule de l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Notre $y = 0$ est à la ligne pointillée sur la figure. Au départ, c'est-à-dire au sommet de la pente, l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec1} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0 + m \times 9,8 \frac{N}{kg} \times 100m \end{aligned}$$

Au sommet de la boucle, l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec2} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + m \times 9,8 \frac{N}{kg} \times 50m \end{aligned}$$

Avec la conservation de l'énergie mécanique, on a donc

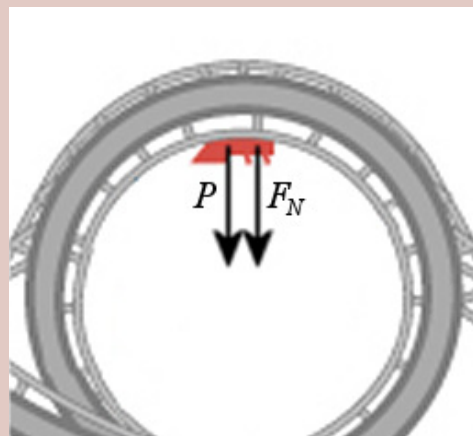
$$\begin{aligned} E_{mec1} &= E_{mec2} \\ m \times 9,8 \frac{N}{kg} \times 100m &= \frac{1}{2}mv^2 + m \times 9,8 \frac{N}{kg} \times 50m \\ 980 \frac{J}{kg} &= \frac{1}{2}v^2 + 490 \frac{J}{kg} \\ v &= 31,3 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

- b) Quelle doit être la hauteur h minimale pour que le chariot reste en contact avec les rails au point le plus haut de la boucle?

Supposons que le chariot est en contact avec les rails. On a alors les forces montrées sur la figure s'appliquant sur le chariot. La somme des forces en y est donc

$$\sum F_y = -mg - F_N = -\frac{mv^2}{r}$$

Ces forces sont égales à la force



centripète, qui est vers le bas ici puisque le centre du cercle est vers le bas quand on est au sommet de la boucle. La normale est alors

$$F_N = \frac{mv^2}{r} - mg$$

On est en contact avec la boucle tant que la normale est positive. Cela nous donne donc

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{r} &> mg \\ v^2 &> rg \end{aligned}$$

Reprenons maintenant l'équation de la conservation de l'énergie mécanique obtenue en a), mais en mettant h à la place du 100 m initial

$$\begin{aligned} E_{mec1} &= E_{mec2} \\ m \times g \times h &= \frac{1}{2} mv^2 + m \times g \times 50m \\ g \times h &= \frac{1}{2} v^2 + g \times 50m \\ h &= \frac{1}{2g} v^2 + 50m \end{aligned}$$

Comme on doit avoir $v^2 > rg$, on a alors

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2g} v^2 + 50m > \frac{rg}{2g} + 50m \\ h &> \frac{rg}{2g} + 50m \\ h &> \frac{25m}{2} + 50m \\ h &> 62,5m \end{aligned}$$

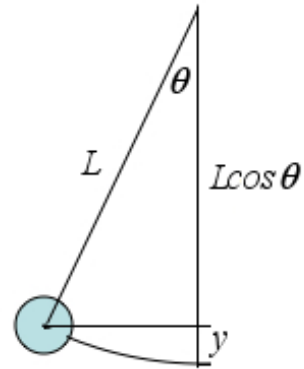
Le clip suivant nous montre une expérience un peu similaire à ce qui se passe dans l'exemple précédent.

<http://www.youtube.com/watch?v=KDe95CqjBG4>

On voit qu'ici, la hauteur initiale est suffisante pour que l'objet reste en contact avec la piste quand l'objet est au point le plus haut de la boucle. Si on laissait partir la balle d'une hauteur de plus en plus petite, la balle quitterait la piste à partir d'une certaine hauteur et ne pourrait plus suivre la boucle.

Exemple avec un pendule

Appliquons maintenant le principe au pendule. Mais avant de le faire, on va trouver immédiatement le lien entre la hauteur du pendule (y) et l'angle que fait la corde (de longueur L) avec la verticale. Remarquez que le $y = 0$ est à la position la plus basse du pendule



La ligne verticale sur ce dessin correspond à la longueur de la corde. On a donc que

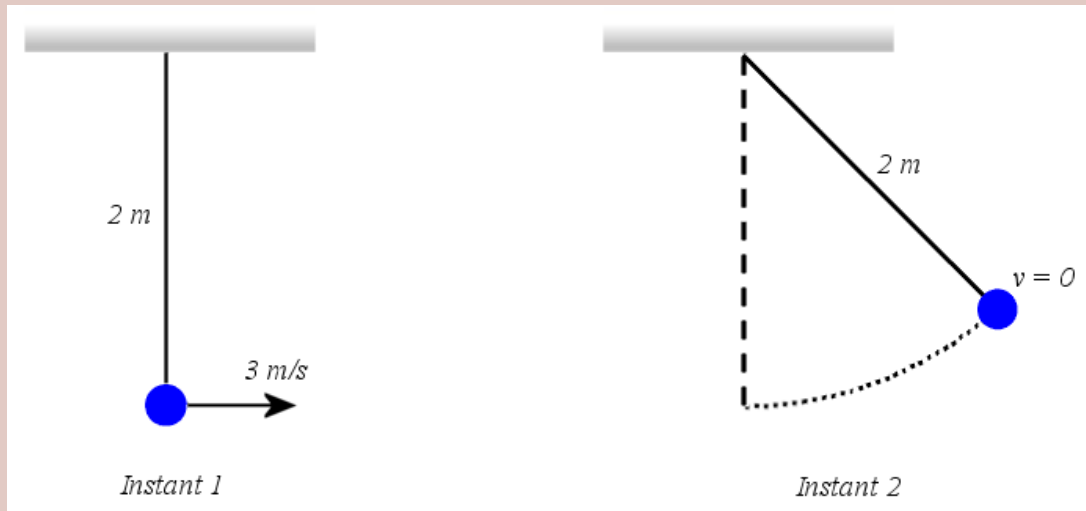
$$L = y + L \cos \theta$$

On peut alors isoler y ou $\cos \theta$ pour obtenir

$$y = L(1 - \cos \theta) \qquad \cos \theta = \frac{L - y}{L}$$

Exemple 9.3.6

Jusqu'à quel angle maximal s'élèvera un pendule si la vitesse du pendule est de 3 m/s quand la corde est verticale?



Il n'y a qu'une masse dans ce problème. L'énergie mécanique est donc

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Quand la corde est verticale (instant 1), cette énergie est

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(0m)$$

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}mv^2$$

Quand l'angle est maximal (instant 2), l'énergie est

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}m\left(0\frac{m}{s}\right)^2 + mgy$$

$$E_{mec2} = mgy$$

En égalant les deux énergies, on a

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

$$y = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{2 \times 9,8\frac{N}{kg}} = 0,459m$$

Ce n'est pas la hauteur qu'on cherche, mais l'angle. On peut passer d'un à l'autre avec nos formules développées précédemment

$$\cos \theta = \frac{L-y}{L}$$

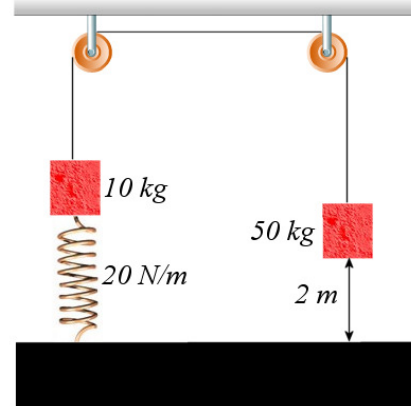
$$\cos \theta = \frac{2m - 0,459m}{2m}$$

$$\theta = 39,6^\circ$$

Formulation plus précise du principe de conservation de l'énergie mécanique

Nous allons maintenant déterminer ce qui arrive s'il y a une force externe. Avant d'en arriver là, nous devons premièrement préciser un peu notre vocabulaire.

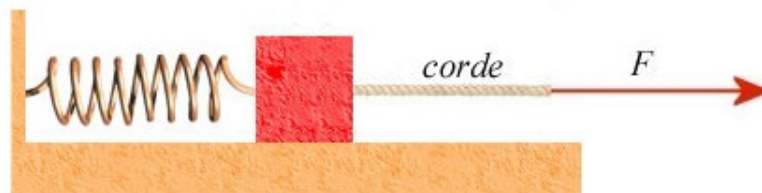
Un **système** est l'ensemble des objets que l'on va considérer dans notre problème. Ainsi, dans l'exemple des deux blocs, notre système était composé de deux blocs et d'un ressort. Ce choix se reflétait dans notre formule de l'énergie dans laquelle il y avait deux énergies cinétiques, deux énergies gravitationnelles (une pour chaque bloc pour ces deux énergies) et une énergie du ressort. Notez qu'en fait, la Terre fait partie de notre système puisque l'énergie gravitationnelle d'un objet est en réalité l'énergie de configuration du système Terre-objet. La Terre est donc comptée dans le système. Il n'est cependant pas nécessaire d'inclure l'énergie cinétique de la Terre puisque nous allons la considérer au repos dans toutes nos applications.



L'énergie mécanique du système est simplement la somme des énergies de tous les objets de notre système. Avec le système de deux blocs et d'un ressort, l'énergie mécanique était donc l'énergie du bloc de 10 kg (cinétique et gravitationnelle) additionnée de l'énergie du bloc de 50 kg (cinétique et gravitationnelle) et additionnée de l'énergie du ressort.

Une **force interne** est une force entre les objets du système. Dans l'exemple des deux blocs, la force faite par le ressort sur le bloc de 10 kg est une force interne puisque les deux objets (celui qui fait la force et celui qui subit la force) font partie de mon système.

Une **force externe** est une force faite sur un objet du système par un objet qui n'est pas dans le système. Si quelqu'un tire sur la corde de la figure suivante avec une force de 10 N et que mon système est formé du bloc et du ressort, il s'agit d'une force externe.



C'est une force externe parce qu'elle est faite par un objet (une personne) qui ne fait pas partie du système si on choisit que le système est formé du bloc et du ressort.

S'il n'y a pas de force externe, on dit qu'on a un **système isolé**

Avec ce vocabulaire un peu plus exact, on peut énoncer plus précisément le principe de conservation de l'énergie mécanique.

Principe de conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système isolé est conservée, c'est-à-dire que

$$\Delta E_{mec} = 0$$

ou

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

ou

$$E_{mec} = \text{constante}$$

Si le travail est fait uniquement par des forces conservatrices.

Il y a donc deux restrictions pour appliquer le principe de conservation de l'énergie.

- 1) Il n'y a pas de force externe (système isolé)
- 2) Il n'y a pas de travail fait par des forces non conservatrices

9.4 L'énergie mécanique en présence de forces externes

On peut quand même utiliser le principe s'il y a une force externe, mais il faudra modifier un peu notre équation pour tenir compte du travail fait par cette force externe.

Commençons avec le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_k = W_{net}$$

Comme le travail est fait par des forces externes ou internes, on peut séparer le travail en travail fait par les forces internes et le travail fait par les forces externes.

$$\Delta E_k = W_{int} + W_{ext}$$

Si le travail interne est fait uniquement par des forces conservatrices, alors on peut calculer le travail fait par ces forces avec l'énergie. On a alors

$$\Delta E_k = -\Delta U + W_{ext}$$

$$\Delta E_k + \Delta U = W_{ext}$$

$$\Delta(E_k + U) = W_{ext}$$

$$\Delta E_{mec} = W_{ext}$$

On peut donc modifier le principe pour arriver à la conclusion suivante

L'énergie mécanique avec une force externe

$$\Delta E_{mec} = W_{ext}$$

ou

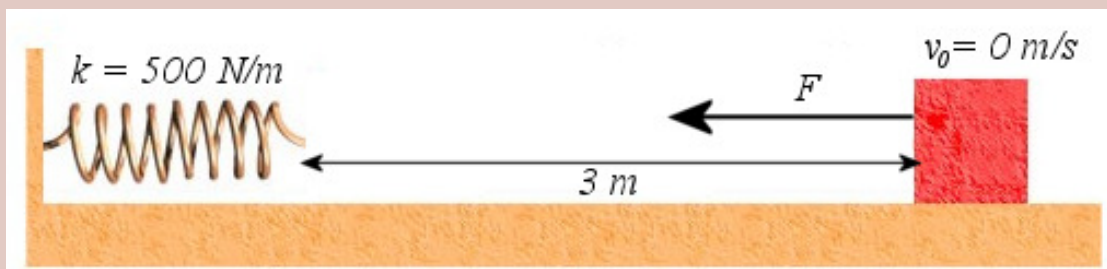
$$E_{mec1} + W_{ext} = E_{mec2}$$

Si les forces internes sont toutes conservatrices

Autrement dit, l'énergie mécanique n'est plus conservée dans ce cas puisque la force externe peut ajouter ou enlever de l'énergie mécanique au système. La première équation nous dit que le changement d'énergie correspond au travail qui a été ajouté par la force externe. La deuxième équation nous dit en fait la même chose puisqu'elle nous dit que l'énergie au moment 2 correspond à l'énergie au moment 1 plus le travail qui a été ajouté par la force externe.

Exemple 9.4.1

Un bloc initialement au repos est poussé par une force constante. Le bloc glisse sur une surface horizontale sans frottement sur une distance de 3 m et fonce ensuite dans un ressort ayant une constante de 500 N/m. Si le ressort se comprime de 15 cm au maximum, quelle est la grandeur de la force?



Comme il y a un bloc et un ressort dans ce système, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

À l'instant 1 (bloc initialement au repos). L'énergie est

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec1} = 0J + 0J + 0J$$

L'énergie cinétique est nulle puisque le bloc est arrêté au départ. L'énergie gravitationnelle est nulle, car le bloc est à une hauteur nulle (on a placé le $y = 0$ à la hauteur initiale du bloc). L'énergie du ressort est nulle, car il n'est pas comprimé ni étiré au départ.

À l'instant 2 (ressort comprimé au maximum), l'énergie est

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec2} = 0J + 0J + \frac{1}{2}500\frac{N}{m}(0,15m)^2$$

$$E_{mec2} = 5,625J$$

On voit que l'énergie mécanique a changé. Ce n'est pas surprenant puisque c'est le résultat de l'action de la force externe. On sait même que le travail fait par la force externe est

$$W_{ext} = \Delta E_{mec}$$

$$W_{ext} = 5,625J - 0J$$

$$W_{ext} = 5,625J$$

On sait donc que

$$W_{ext} = 5,625J$$

$$F_{ext}\Delta s \cos \theta = 5,625J$$

$$F_{ext} \times 3,15m \times \cos 0^\circ = 5,625J$$

$$F_{ext} = 1,7857N$$

9.5 L'énergie mécanique en présence de forces non conservatrices

On peut aussi utiliser l'énergie mécanique même s'il y a des forces non conservatrices présentes, mais au prix d'une autre modification au principe de conservation de l'énergie mécanique.

Commençons encore une fois avec le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_k = W_{net}$$

Comme le travail est fait par des forces conservatrices ou non conservatrices, on peut séparer le travail en travail fait par les forces conservatrices et le travail fait par les forces non conservatrices.

$$\Delta E_k = W_{cons} + W_{non-cons}$$

Comme le travail fait par les forces conservatrices peut se calculer avec l'énergie, on obtient

$$\Delta E_k = -\Delta U + W_{non-cons}$$

$$\Delta E_k + \Delta U = W_{non-cons}$$

$$\Delta(E_k + U) = W_{non-cons}$$

$$\Delta E_{mec} = W_{non-cons}$$

On peut donc modifier le principe pour arriver à la conclusion suivante.

L'énergie mécanique avec des forces non conservatrices

$$\Delta E_{mec} = W_{non-cons}$$

ou

$$E_{mec1} + W_{non-cons} = E_{mec2}$$

Souvent, la force non conservatrice sera la friction qui s'oppose au mouvement. Dans ce cas, le travail fait par la friction est

$$W_{non-cons} = F_f \Delta s \cos 180^\circ$$

$$W_{non-cons} = -F_f \Delta s$$

On obtient donc le résultat suivant :

L'énergie mécanique avec de la friction qui s'oppose au mouvement.

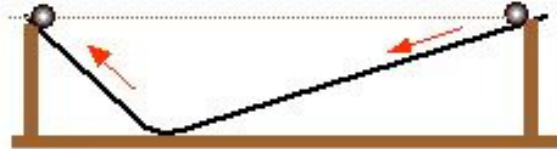
$$\Delta E_{mec} = -F_f \Delta s$$

ou

$$E_{mec1} - F_f \Delta s = E_{mec2}$$

Ces deux équations nous indiquent que l'énergie mécanique baisse. En effet, la première nous dit que la variation de l'énergie mécanique est négative, donc qu'elle baisse. La deuxième nous dit que l'énergie à l'instant 2 est l'énergie initiale moins ce qui a été perdu à cause de la friction.

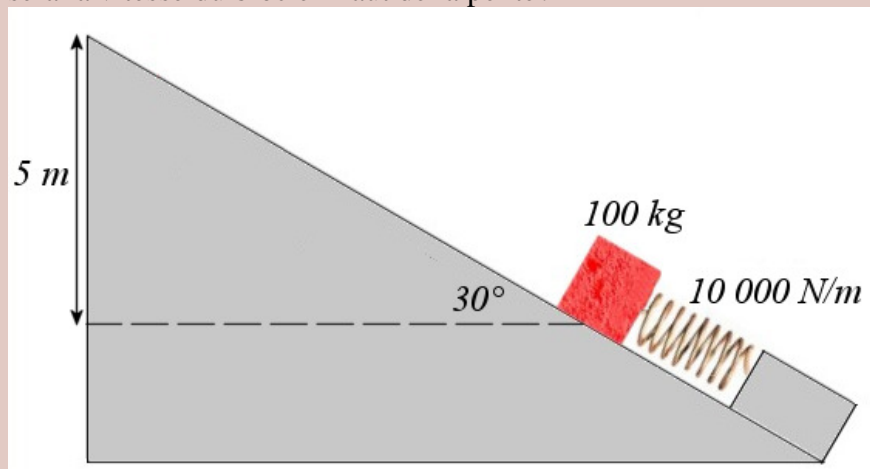
Cette conclusion correspond mieux à notre compréhension du monde qui nous entoure. Même si le principe de conservation de l'énergie mécanique nous dit que la bille dans cette expérience devrait remonter à la même hauteur que celle où elle a été lâchée, on sait que ce n'est pas comme ça que ça va se passer.



On se doute bien que la bille va remonter et s'arrêtera un peu avant d'atteindre la même hauteur. Cela se produit parce que la friction enlève lentement de l'énergie mécanique et que la bille ne pourra plus monter aussi haut parce qu'une baisse d'énergie mécanique signifie une perte de hauteur quand toute l'énergie est sous forme d'énergie gravitationnelle.

Exemple 9.5.1

Un bloc de 100 kg initialement au repos sur une pente inclinée de 30° sera poussé par un ressort ($k = 10\,000\text{ N/m}$) comprimé de 2 m. Si le bout de la rampe est 5 m plus haut que le point de départ du bloc et que le coefficient de friction entre le bloc et la pente est de 0,2, quelle sera la vitesse du bloc en haut de la pente?



Comme il y a un bloc et un ressort dans ce système, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Prenons comme instant 1 le moment où le bloc est au repos accoté sur le ressort comprimé. L'énergie est alors

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec1} = 0J + 0J + \frac{1}{2}10\,000\frac{N}{m}(2m)^2$$

$$E_{mec1} = 20\,000J$$

L'énergie cinétique est nulle puisque le bloc est initialement arrêté. L'énergie gravitationnelle est nulle, car le bloc est à une hauteur nulle (on a placé le $y = 0$ à la hauteur initiale du bloc).

Quand la masse est en haut de la rampe, l'énergie mécanique est

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + 100kg \times 9,8\frac{N}{kg} \times 5m + 0J$$

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + 4900J$$

L'énergie du ressort est maintenant nulle parce que le ressort s'est décomprimé en poussant le bloc. Il est maintenant au repos (ni étiré, ni comprimé).

On ne doit pas égaler les deux énergies ici parce qu'il y a une force non conservatrice qui fera perdre de l'énergie. On doit trouver le travail fait par cette force non conservatrice pour savoir le changement d'énergie. Ce travail est

$$W_{non-cons} = F_f \Delta s \cos \theta$$

$$W_{non-cons} = \mu_c F_N \Delta s \cos 180^\circ$$

$$W_{non-cons} = -\mu_c F_N \Delta s$$

L'angle est de 180° car la force est directement opposée au mouvement. On trouve la normale avec la somme des forces en y sur le bloc. (On a pris un axe des x vers le haut de la pente)

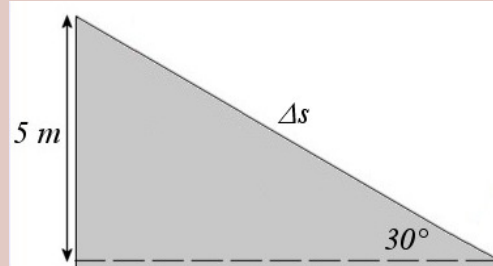
$$\sum F_y = mg \sin(-120^\circ) + F_N = 0$$

$$F_N = mg \sin(120^\circ) = 848,7N$$

Le déplacement se trouve avec un peu de trigonométrie

$$\frac{5m}{\Delta s} = \sin 30^\circ$$

$$\Delta s = 10m$$



On a donc

$$W_{non-cons} = -\mu_c F_N \Delta s$$

$$W_{non-cons} = -0,2 \times 848,7 N \times 10m$$

$$W_{non-cons} = -1697,4J$$

La force de friction fait donc perdre 1697,4J. On a donc

$$E_{mec1} + W_{non-cons} = E_{mec2}$$

$$20\,000J + -1697,4J = \frac{1}{2}mv^2 + 4900J$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 13402,6J$$

$$v = 16,37 \frac{m}{s}$$

Il se peut aussi qu'il y ait à la fois des forces non conservatrices et des forces externes. Dans ce cas, chacune de ces forces peut faire un travail et modifier la quantité d'énergie mécanique. En utilisant les deux modifications obtenues précédemment, on obtient notre résultat le plus général.

L'énergie mécanique avec des forces externes et des forces non conservatrices

$$\Delta E_{mec} = W_{ext} + W_{non-cons}$$

ou

$$E_{mec1} + W_{ext} + W_{non-cons} = E_{mec2}$$

9.6 La conservation de l'énergie

Origine du principe

Depuis longtemps, on savait qu'avec de la friction on peut générer de la chaleur. Vous pouvez d'ailleurs voir ce phénomène dans ce vidéo dans lequel on voit les freins d'une voiture chauffer lors d'un freinage.

<http://www.youtube.com/watch?v=D8MsuFHlc54>

Les freins arrêtent les roues par la force de friction, ce qui génère beaucoup de chaleur. On pourrait même chauffer au point de détruire les freins.

http://www.youtube.com/watch?v=c_ItwLcBw5Q

Au 18^e siècle, on pensait généralement que la destruction de la surface de l'objet qu'entraîne la friction libérait une substance appelée le calorique. Plus la surface était endommagée, plus il y avait de calorique libéré et plus ça chauffait. Toutefois, à la fin de ce siècle, le comte Rumford publia ses observations (en 1798) montrant que cette théorie ne pouvait être vraie. Il avait remarqué que lors du perçage des trous dans les canons, certains processus qui détruisaient beaucoup la surface produisaient moins de chaleur que certaines étapes dans lesquelles la surface était moins endommagée (comme le polissage). Pourtant, il y avait moins de calorique libéré si la surface était peu détruite. La théorie du calorique venait de subir un coup fatal.

Ces observations amenèrent James Prescott Joule à penser qu'il pouvait y avoir un lien entre le travail et la chaleur libérée. En 1842, il fit une célèbre expérience dans laquelle des masses qui descendent font tourner des pales dans l'eau.

<http://www.youtube.com/watch?v=bZbTZN6V7YI>

Le brassage de l'eau qu'entraîne le mouvement des pales provoque alors une augmentation de température. On peut voir que la température de l'eau augmente bel et bien quand on la brasse dans ce clip

<http://www.youtube.com/watch?v=d0jD0GpcKJE>

Joule put alors comparer le travail fait par la gravitation et la chaleur générée (Q) pour se rendre compte qu'un lien existait entre les deux. Il venait de prouver que l'énergie mécanique perdue dans un système à cause de la friction se retrouve sous forme de chaleur.

Cela ouvrait la voie à un principe de conservation plus vaste.

$$E_{mec} + Q = \text{constante}$$

ou

$$E_k + U + Q = \text{constante}$$

Ainsi, on peut appliquer ce principe de conservation même en présence de forces de friction.

En 1847, Heinrich Helmholtz étend encore plus ce principe en postulant qu'il y a bien d'autres formes d'énergie (comme la lumière et le son par exemple) et que si on tient compte de toutes ces formes d'énergie, on obtient toujours une constante quand on fait la somme des énergies. (On a inclus ici quelques formes inconnues à l'époque de Helmholtz)

$$E_k + U + Q + E_{\text{son}} + E_{\text{lumière}} + E_{\text{électrique}} + \\ E_{\text{chimique}} + E_{\text{nucléaire}} + E_{\text{masse}} + \dots = \text{constante}$$

Il n'y a aucune exception connue à ce principe de conservation de l'énergie.

Helmholtz prouva ce principe en utilisant le fait que toutes les forces ont pour origine une des forces fondamentales de l'univers (on n'en connaissait que deux à cette époque, mais il y en a quatre aujourd'hui). Comme ces forces fondamentales sont toutes conservatrices, il s'ensuit que l'énergie doit être conservée.

Une autre preuve intéressante fut faite par Emily Noether en 1918. Elle démontra que si les lois de la physique ne changeaient pas au cours du temps, alors l'énergie devait être conservée. En fait, le principe découvert par Noether est plus vaste puisqu'il montre que pour chaque symétrie (ici l'invariance dans le temps), il y a une quantité conservée (ici l'énergie).

Pourquoi utilise-t-on le terme « énergie potentielle »?



Attention

Ceci est un historique. Il sert à vous expliquer l'origine du vocabulaire utilisé. Il n'y aura aucune question sur cette section à l'examen, elle est là pour votre culture personnelle.

Bernoulli utilisa le terme « énergie » en 1717 pour parler du travail. En 1807, Thomas Young proposa de l'utiliser pour la quantité mv^2 (qui portait alors le nom de force vive). En grec, énergie réfère à une activité, à un mouvement, ce qui semblait approprié pour une quantité qui dépend du mouvement. Le terme fut toutefois peu utilisé avant 1847. À ce moment, Helmholtz proposa de l'utiliser pour la quantité conservée qu'il venait de découvrir.

Après la découverte du principe de conservation de l'énergie, Rankine classa les énergies en 2 catégories

- 1) Énergie réelle
Toutes les formes d'énergies reliées à du mouvement se retrouvaient dans cette catégorie : l'énergie cinétique, l'énergie lumineuse, l'énergie associée au courant électrique...
- 2) Énergie potentielle
Toutes les formes d'énergie qui ne dépendent pas du mouvement se retrouvaient dans cette catégorie : énergie gravitationnelle, énergie d'un gaz, énergie d'un ressort comprimé...

Comme le terme « énergie » était associé au mouvement, on considéra comme véritable énergie seulement les formes d'énergie dans laquelle il y a du mouvement. On appela alors les autres formes « énergie potentielle », car elles avaient le potentiel de se transformer en énergie réelle, comme l'énergie gravitationnelle qui devient de l'énergie cinétique à mesure qu'un objet en chute libre tombe.

Cette classification, bien inutile, cessa assez rapidement d'être utilisée et plus personne n'utilise le terme d' « énergie réelle ». Curieusement, le terme « énergie potentielle » a survécu jusqu'à aujourd'hui même s'il n'a plus aucun sens. Bien des étudiants cherchent à comprendre ce qu'il y a de potentiel dans l' « énergie potentielle gravitationnelle ». Ils ont bien raison d'être intrigués parce qu'il n'y a effectivement rien de « potentiel » dans l'énergie gravitationnelle. C'est une forme d'énergie au même titre que l'énergie cinétique et les autres formes d'énergie.

U est l'énergie de configuration.

Les énergies associées aux forces conservatrices dépendent de la configuration du système. Par exemple, l'énergie gravitationnelle dépend de la hauteur de la masse et l'énergie du ressort dépend de l'étirement du ressort. C'est pourquoi il est très approprié d'appeler ces énergies U « **énergie de configuration** » plutôt qu' « énergie potentielle ».

Qu'est-ce que l'énergie?

On cherche parfois à savoir à quoi correspond concrètement l'énergie. Sachez qu'aucun physicien ne pourra vous répondre si vous lui demandez « Qu'est-ce que l'énergie? ». Richard Feynman, prix Nobel de physique, résuma bien ce qu'on sait sur l'énergie en 1961.

Il y a une loi régissant tous les phénomènes naturels connus. Il n'y a aucune exception connue à cette loi, elle est exacte selon nos connaissances actuelles. Cette loi est la conservation de l'énergie. Elle nous dit qu'une certaine quantité, qu'on appelle énergie, ne change pas lors de n'importe quel changement dans la nature. Cette une idée très abstraite parce qu'il s'agit d'un principe mathématique qui dit qu'une quantité numérique ne change pas quand quelque chose se produit. Ce n'est

pas la description d'un mécanisme ou de quelque chose de concret, c'est uniquement le fait étrange qu'on peut calculer un nombre et que si on calcule ce nombre après de nombreuses transformations se produisant dans la nature, il reste identique.

Personne ne sait donc vraiment, ce qu'est l'énergie, mais on sait que sa valeur reste constante et que cela peut nous aider à déduire le résultat de certaines transformations.

Maintenant, un petit moment de détente.

http://www.youtube.com/watch?v=o_5oYuDY2qM

(la définition de l'énergie n'est pas très bonne... mais c'est tellement divertissant)

9.7 La formule de la force à partir de la formule de l'énergie de configuration U .

On a vu que pour chaque force conservatrice, il y a une énergie de configuration associée. On a même trouvé la formule de l'énergie en utilisant la formule de la force dans le cas de l'énergie gravitationnelle et de l'énergie du ressort. On va maintenant voir comment on pourrait faire le contraire, c'est-à-dire trouver la formule de la force si on connaît la formule de l'énergie de configuration.

Supposons qu'il y a un travail infinitésimal (dW) qui est fait sur un objet. Comme le travail correspond à moins la variation d'énergie de l'objet, on a

$$dU = -dW$$

Or, le travail dW est fait par une force sur une distance infinitésimale (ds). On a donc

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Si on calcule ce produit scalaire avec les composantes de la force, on a

$$dU = -F_x \cdot dx - F_y \cdot dy - F_z \cdot dz$$

Si y et z sont constants, on a alors

$$dU = -F_x \cdot dx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

De façon correcte, cette dérivée par rapport à x quand on considère que y et z sont constants est une dérivée partielle. On a donc

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

En procédant de la même façon avec les autres composantes, on a

La force à partir de l'énergie de configuration

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

On peut tester notre formule avec la gravitation et le ressort.

Pour la gravitation, l'énergie est $U = mgy$. Les composantes de la force sont donc

$$F_x = -\frac{\partial(mgy)}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial(mgy)}{\partial y} = -mg$$

$$F_z = -\frac{\partial(mgy)}{\partial z} = 0$$

Qui sont bel et bien les composantes de la force de gravitation.

Pour le ressort, l'énergie est $U = \frac{1}{2}kx^2$. Les composantes de la force sont donc

$$F_x = -\frac{\partial(\frac{1}{2}kx^2)}{\partial x} = -kx$$

$$F_y = -\frac{\partial(\frac{1}{2}kx^2)}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial(\frac{1}{2}kx^2)}{\partial z} = 0$$

Qui sont les composantes de la force du ressort.

9.8 Le graphique de U en fonction de la position

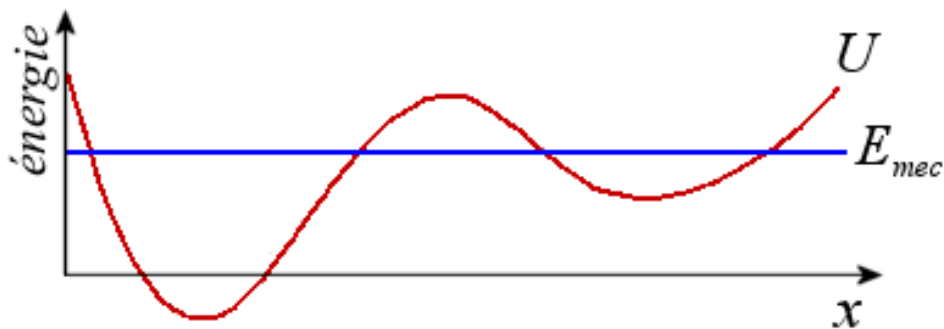
Il y a plusieurs informations qu'on peut tirer du graphique de U (la somme de toutes les énergies de configuration) en fonction de la position si l'énergie mécanique est conservée. On va travailler ici avec une seule dimension (x).

1) Le graphique de la force sur l'objet

Comme on sait que

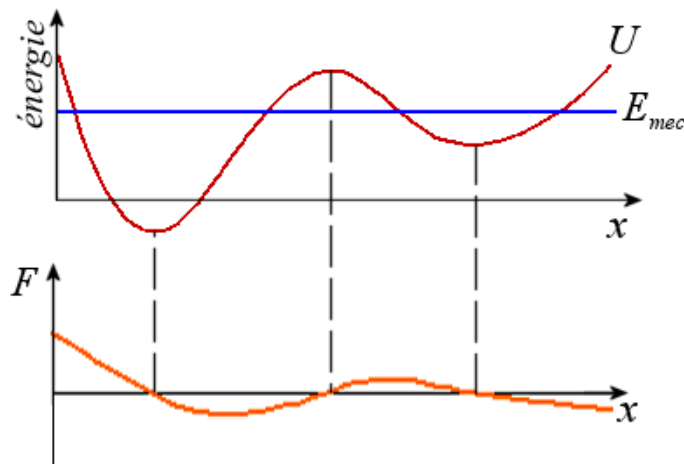
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

On sait que la force est $-$ (dérivée de l'énergie U). On obtient donc le graphique de la force sur l'objet en traçant le graphique de moins la dérivée de U . Supposons que notre graphique de U et de E_{mec} en fonction de la position soit donné par le graphique suivant.



La ligne de l'énergie mécanique en fonction de la position est évidemment une ligne constante puisque l'énergie est conservée et qu'elle garde donc toujours la même valeur même si l'objet change de place.

Si on fait le graphique de moins la dérivée de U , on remarque qu'au départ, la pente est négative, donc que la force est positive et qu'elle diminue lentement. Ensuite la pente devient positive, donc que la force est négative. Après le maximum de U , la pente redevient négative (la force est donc positive) pour redevenir positive (force négative) après le minimum relatif. On a donc le graphique suivant pour la force.



2) Les endroits où l'objet peut être et l'endroit où l'objet a sa vitesse maximale

Quand on connaît le graphique de U et de E_{mec} , on peut facilement déterminer les endroits où l'objet peut être et les endroits où l'objet ne peut pas aller.

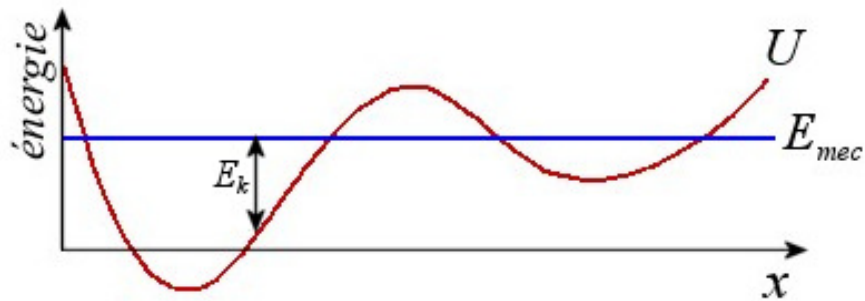
Comme l'énergie mécanique est la somme

$$E_{mec} = E_k + U$$

On a que

$$E_k = E_{mec} - U$$

L'énergie cinétique est donc l'écart entre l'énergie mécanique et l'énergie U . Graphiquement, l'énergie cinétique est l'écart entre la ligne de E_{mec} et la courbe de U .

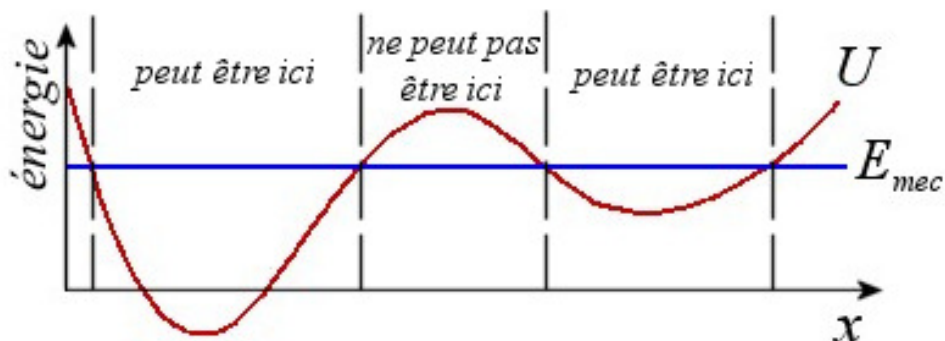


L'objet ne peut donc pas être aux endroits où la courbe de U est au-dessus de la ligne de E_{mec} , car l'énergie cinétique deviendrait négative, ce qui est impossible.

Endroits où l'objet ne peut pas être

L'objet ne peut pas être aux endroits où la courbe de U est au-dessus de la ligne de E_{mec} .

Dans notre cas, on a donc



Dans ce cas, cela signifie que l'objet reste toujours dans la partie de droite ou reste toujours dans la partie de gauche où elle peut être. Il est tout à fait impossible qu'elle passe d'une à l'autre, car il faudrait pour cela qu'elle passe par la région interdite entre les deux régions permises.

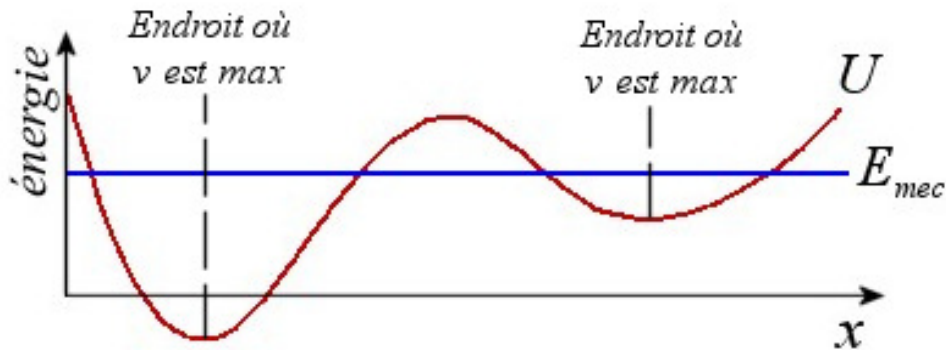
Évidemment, si on change l'énergie mécanique de l'objet, on change les endroits où il est possible que l'objet soit. Si on augmente l'énergie mécanique (en ajoutant de l'énergie à l'objet) jusqu'à ce que la ligne de E_{mec} dépasse le maximum au centre de la courbe de U , l'objet pourra alors passer de la région permise de droite à la région permise de gauche, car il n'y aura plus de zone interdite entre les deux.

Si on cherche l'endroit où la vitesse est maximale, il faut simplement trouver l'endroit où l'énergie cinétique est maximale. Comme cette énergie est l'écart entre E_{mec} et U , il faut trouver l'endroit où l'écart est maximum. Bien, sûr, cela va se produire quand U est à son minimum.

Endroit où la vitesse est maximale

La vitesse de l'objet est maximale quand l'écart entre E_{mec} et U est maximal (et que E_{mec} est au-dessus de U)

Dans notre cas, on a donc

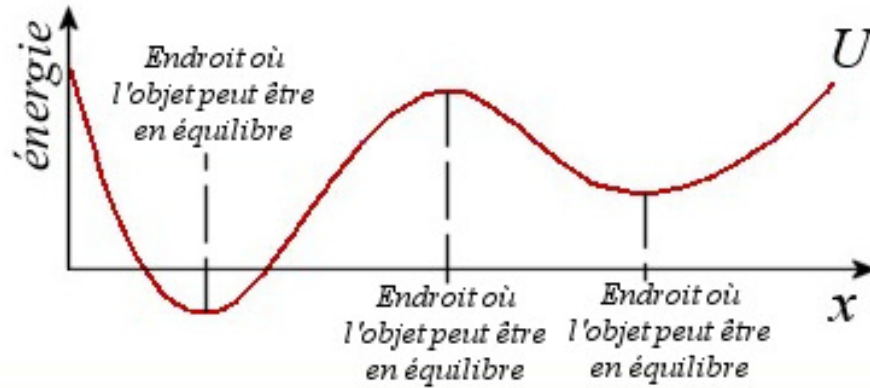


Il y a deux endroits, car il y a deux régions où l'objet peut être. Si l'objet est dans la région permise de gauche, sa vitesse est maximale à la position indiquée la plus à gauche sur le graphique. Si l'objet est dans la région permise de droite, sa vitesse est maximale quand il est la position indiquée sur le graphique la plus à droite.

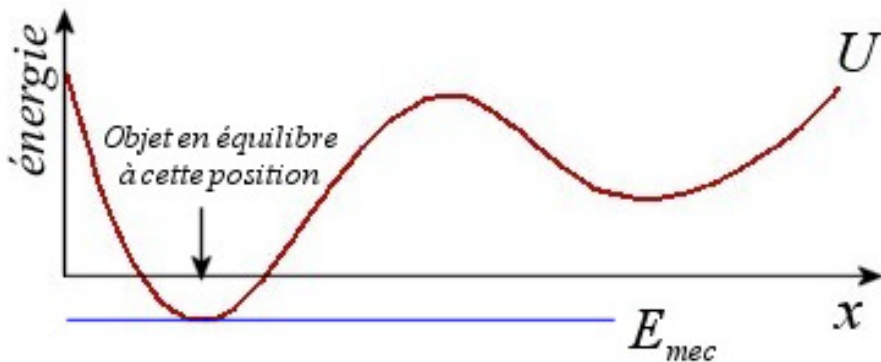
3) Les points d'équilibre

Avec le graphique de U , on peut également facilement déterminer les endroits où l'objet pourrait être en équilibre.

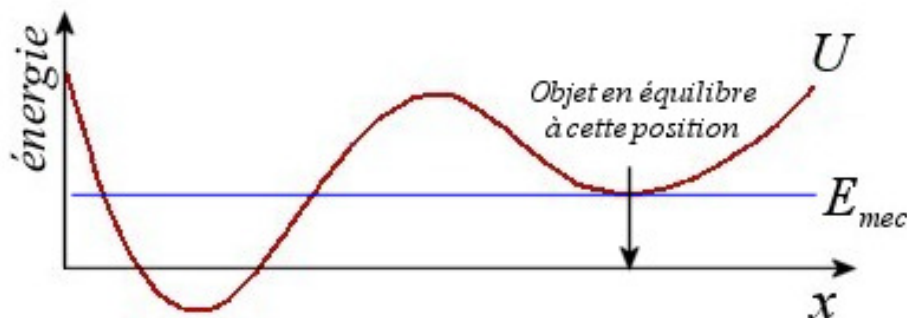
Si l'objet est en équilibre, c'est qu'il n'y a aucune force qui s'exerce sur ce dernier. S'il y a une force, il y aura accélération et l'objet ne pourra rester en place. Or, la force est $-$ (dérivée de U) et la force est donc nulle si la pente est nulle. Ainsi, dans notre exemple, il y a trois endroits où l'objet peut être à équilibre.



Évidemment, l'énergie mécanique doit être exactement égale à U au point d'équilibre pour que l'objet soit en équilibre. Si l'énergie mécanique est supérieure à U , il y aura de l'énergie cinétique et l'objet n'est pas en équilibre.

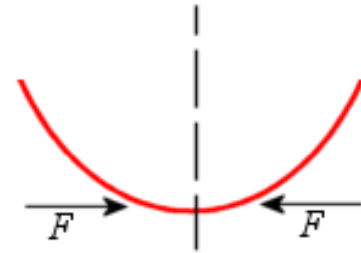


Il est clair dans cette situation que l'objet doit absolument rester à la position d'équilibre puisque l'objet ne peut être aux endroits où U est plus grand que E_{mec} . Il ne peut être qu'à la position d'équilibre. Il se produit la même chose si l'objet est à la position indiquée sur la figure.

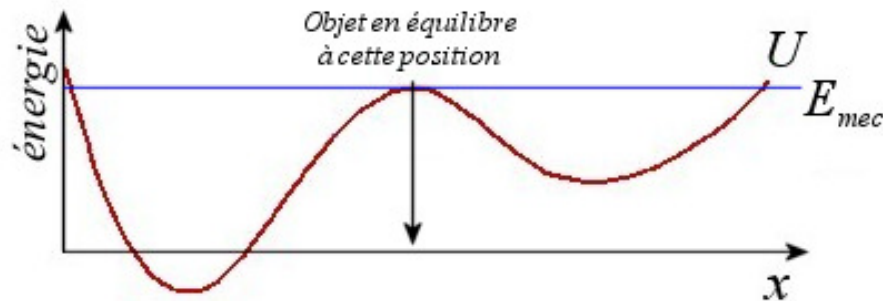


Si l'objet est à la position indiquée, il doit rester là sans bouger, car il ne peut se déplacer sans aller dans des régions interdites. Avec cette énergie mécanique, l'objet peut aussi être dans le creux de gauche ou l'énergie mécanique est plus grande que U , mais si l'objet est, au départ, à la position d'équilibre de droite, il n'a aucun moyen d'aller dans la région permise de gauche, car il devrait alors traverser une région interdite.

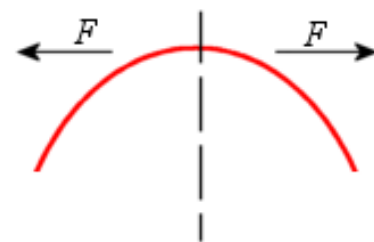
Ces deux situations correspondent à des équilibres stables. Même si on augmente légèrement l'énergie mécanique, l'objet restera près de la position d'équilibre, car il ne peut s'éloigner beaucoup sans entrer dans des régions interdites. On peut également voir que les forces de chaque côté de la position d'équilibre tentent toujours de ramener l'objet vers la position d'équilibre. À droite de la position d'équilibre, la pente est positive et la force est donc négative. Cette force vers la gauche ramène l'objet vers la position d'équilibre. À gauche de la position d'équilibre, la pente est négative et la force est donc positive. Cette force vers la droite ramène également l'objet vers la position d'équilibre.



Il existe un troisième endroit où la force est nulle : le maximum relatif de la fonction.



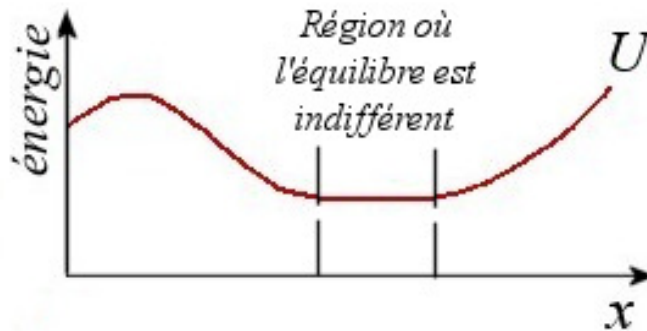
Bien que l'objet soit en équilibre à cette position, on voit que l'objet pourrait quitter cet endroit sans entrer dans une région interdite. Il s'agit dans ce cas d'un équilibre instable. En regardant les forces sur l'objet autour de cette position d'équilibre, on comprend également pourquoi l'équilibre est instable. À droite de la position d'équilibre, la pente est négative et la force est donc positive, cette force vers la droite va éloigner de plus en plus l'objet de la position d'équilibre. À gauche de la position d'équilibre, la pente est positive et la force est donc négative. Cette force vers la gauche éloigne aussi de plus en plus l'objet de la position d'équilibre.



En fait, la situation est la même que si on tentait de placer une bille à l'équilibre sur une surface dont la hauteur est de la même forme que le graphique de U . Vous pouvez placer la bille dans les creux et elle restera immobile à cet endroit, même s'il y a une petite perturbation (un léger vent) qui vient agir sur la bille. Ce sont les équilibres stables. On pourrait aussi placer la bille en équilibre sur le dessus des crêtes. Cependant, cet équilibre

est instable et à la moindre perturbation, la bille va tomber d'un côté ou de l'autre de la position d'équilibre.

Il existe une troisième possibilité : la pente et la concavité sont nulles en même temps. C'est ce qui se produit dans la région indiquée sur ce graphique.



Si l'objet est à un endroit dans cette région, il n'y a aucune force qui s'appliquerait sur lui s'il y avait une petite perturbation, car la pente est nulle, ce qui implique que la force est nulle. Comme il y a plusieurs positions où l'objet peut être en équilibre dans cette région, cela ne fait aucune différence où est l'objet et on parle alors d'équilibre indifférent.

On peut résumer ainsi :

Positions d'équilibres

L'objet peut être en équilibre aux endroits où la pente de U est nulle. L'équilibre est stable si le graphique de U est concave vers le haut à cet endroit, l'équilibre est instable si le graphique de U est concave vers le bas à cet endroit et l'équilibre est indifférent si la concavité est nulle à cet endroit.

9.9 Formule générale de l'énergie gravitationnelle

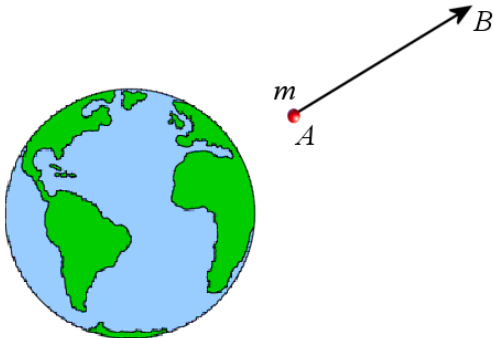
La formule

On a obtenu précédemment l'énergie gravitationnelle en partant de la force gravitationnelle. Cependant, en prenant la formule de la force de gravitation près de la Terre (mg), notre résultat n'est valide que si on reste près de la surface de la Terre. Elle n'est donc pas correcte en général puisqu'on sait que la force de gravitation entre une planète et un objet diminue avec le carré de la distance. On va donc obtenir ici une formule plus générale de l'énergie gravitationnelle en partant de la loi de la gravitation

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Si on peut calculer le travail à partir de l'énergie gravitationnelle, cela signifie que

$$W_g = -\Delta U_g$$



Calculons donc le travail fait par la force de gravité quand un objet passe de la position A à la position B.

$$\begin{aligned} W_g &= \int_{r_A}^{r_B} F dr \cos \theta \\ &= \int_{r_A}^{r_B} \frac{GMm}{r^2} dr \cos 180^\circ \end{aligned}$$

L'angle est de 180° , car le déplacement est en s'éloignant de la Terre et la force est vers la Terre.

En faisant l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} W_g &= -GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr \\ &= -GMm \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \\ &= \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A} \end{aligned}$$

Or, on doit avoir

$$W_g = -\Delta U_g = -U_{gB} + U_{gA}$$

On trouve l'énergie en comparant les deux équations. On obtient alors que, dans sa formulation la plus générale, l'énergie gravitationnelle est

$$U_g = -\frac{GMm}{r} + \text{constante}$$

Encore une fois, on peut ajouter cette constante puisqu'elle s'annulera quand on va soustraire les énergies gravitationnelles. Contrairement à ce qu'on avait avec l'énergie gravitationnelle mgy , cette constante ne permet pas de changer l'endroit de notre $r = 0$. Comme elle n'a en fait aucune utilité, nous allons poser qu'elle est nulle. On a alors

Énergie gravitationnelle (U_g) (formule générale)

$$U_g = -\frac{GMm}{r}$$

Le r est la distance entre l'objet et le centre de la planète ou de l'étoile et il n'est pas possible de changer cela. L'énergie gravitationnelle est toujours négative et s'approche de zéro à mesure que l'objet s'éloigne de la planète ou de l'étoile. Ainsi, l'énergie gravitationnelle augmente à mesure que l'objet s'éloigne de la planète ou de l'étoile. Dans le fond, c'est pratique que l'énergie gravitationnelle soit nulle quand un objet est loin d'une planète ou d'une étoile, car on n'aura pas besoin de tenir compte de toutes les autres planètes et étoiles de l'univers si on calcule l'énergie gravitationnelle d'un objet à proximité de la Terre. Toutes ces planètes et étoiles étant tellement loin, l'énergie gravitationnelle due à ces corps célestes sera tout à fait négligeable.

Noter que quand on calcule l'énergie gravitationnelle d'un objet à proximité d'une planète, ce qu'on obtient n'est pas l'énergie de l'objet uniquement, mais plutôt l'énergie du système planète-objet. Si l'énergie gravitationnelle se transforme en énergie cinétique, l'énergie cinétique peut donc se retrouver dans l'objet **et** la planète et non pas uniquement dans l'objet. La répartition dépend de la masse de l'objet et de la planète. Cependant, si la planète est nettement plus massive que l'objet, l'énergie gravitationnelle ira presque exclusivement dans l'objet.

Pour montrer la différence entre la formule de l'énergie mgy et notre formule plus générale, nous allons faire un petit exemple où on lance un objet dans les airs. Ceci permettra de voir l'écart entre la solution approximative dans laquelle on suppose que la force de gravitation est constante et la solution exacte qui tient compte du fait que la force diminue avec la distance.

Exemple 9.9.1

On lance une balle à 5000 m/s vers le haut à partir de la surface de la Terre. Jusqu'à quelle hauteur va monter la balle si on néglige la friction faite par l'atmosphère?

a) En utilisant $U = mgy$

En plaçant le $y = 0$ au niveau du sol, l'énergie mécanique initiale est

$$\begin{aligned} E_{mec1} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

Quand l'objet arrive au point le plus haut, sa vitesse est nulle. Son énergie mécanique est donc

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$= mgy$$

En égalant l'énergie initiale à l'énergie au point le plus haut, on obtient

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

$$y = \frac{v^2}{2g} = 1,25 \times 10^6 m = 1250 km$$

b) En utilisant la formule générale pour l'énergie gravitationnelle.

L'énergie mécanique initiale est

$$E_{mec1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_{Terre}m}{r}$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_{Terre}m}{R_{Terre}}$$

Au départ, r est le rayon de la Terre parce que quand l'objet est la surface de la Terre, il est à une distance du centre égale au rayon de la Terre.

Quand l'objet arrive au point le plus haut, sa vitesse est nulle. Son énergie mécanique est donc

$$E_{mec2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_{terre}m}{r}$$

$$= \frac{-GM_{terre}m}{r}$$

En égalant l'énergie initiale à l'énergie au point le plus haut, on obtient

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_{terre}m}{R_{Terre}} = \frac{-GM_{terre}m}{r}$$

$$\frac{1}{2} \left(5000 \frac{m}{s} \right)^2 + \frac{-(6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{s^2}) \times (5,974 \times 10^{24} kg)}{(6,378 \times 10^6 m)} = \frac{-(6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{s^2}) \times (5,974 \times 10^{24} kg)}{r}$$

$$r = 7,972 \times 10^6 m$$

Ceci est la distance entre l'objet et le centre de la Terre. Si on veut la distance à partir de la surface, on doit soustraire le rayon de la Terre.

$$\text{distance} = 7,972 \times 10^6 \text{ m} - 6,378 \times 10^6 \text{ m} = 1,594 \times 10^6 \text{ m} = 1594 \text{ km}$$

On voit donc que l'objet pourra s'éloigner jusqu'à 1594 km de distance, soit 344 km de plus que ce qu'on obtient avec la formule approximative. Il ne faut donc pas utiliser la formule $U = mgy$ si les objets s'éloignent beaucoup de la surface de la Terre. Le calcul est peu plus difficile avec la formule générale, mais la réponse est exacte.

L'énergie mécanique d'un objet en orbite

À partir de l'équation générale de l'énergie gravitationnelle, on peut faire une formule toute simple qui va nous donner l'énergie mécanique d'un objet en orbite circulaire autour d'un corps céleste.

L'énergie mécanique de l'objet de masse m autour d'un corps céleste de masse M_c est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

Or, comme la force centripète sur l'objet est la force de gravitation, on a

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_c m}{r^2}$$

et qu'ainsi

$$mv^2 = \frac{GM_c m}{r}$$

En remplaçant dans l'équation de l'énergie mécanique, on obtient

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2} \left(\frac{GM_c m}{r} \right) + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$E_{mec} = \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{GM_c m}{r} \right)$$

Pour obtenir finalement

Énergie mécanique d'un objet de masse m autour d'un corps céleste de masse M_c

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

Le fait que l'énergie soit négative nous indique que l'objet est lié à la planète, qu'il ne pourra pas quitter la planète. En effet, à une distance très grande de la planète, l'énergie gravitationnelle est nulle et l'énergie cinétique est positive. Cela signifie que l'énergie mécanique est au minimum zéro quand l'objet est loin de la planète. Si l'objet à une énergie mécanique totale négative, il ne peut pas aller aux endroits où l'énergie est nulle et le satellite ne peut donc pas quitter la planète.

Si on veut que l'objet quitte la planète, on doit lui fournir de l'énergie jusqu'à ce que son énergie mécanique devienne nulle (au minimum). Ainsi, si l'énergie mécanique d'un objet en orbite autour de la Terre est de -1000 J, on doit lui fournir au moins 1000 J pour qu'il puisse quitter la Terre.

Exemple 9.9.2

Quelle énergie doit-on fournir pour placer un satellite de 100 kg en orbite sur une orbite circulaire à 200 km au-dessus de la surface de la Terre?

Initialement, l'énergie du satellite au repos à la surface de la Terre est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_{terre}m}{r} \\ &= 0 + \frac{-(6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{s^2}) \times (5,974 \times 10^{24} kg) \times (100 kg)}{(6,378 \times 10^6 m)} \\ &= -6,2514 \times 10^9 J \end{aligned}$$

(Ne pas prendre la formule que l'on a obtenue dans cette section puisque le satellite n'est pas en orbite à ce moment. Notez qu'on a négligé la vitesse initiale du satellite due à la rotation de la Terre)

Une fois en orbite, l'énergie du satellite est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{-GM_{terre}m}{2r} \\ &= \frac{-(6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{s^2}) \times (5,974 \times 10^{24} kg) \times (100 kg)}{2(6,378 \times 10^6 m + 200\,000 m)} \\ &= -3,0307 \times 10^9 J \end{aligned}$$

La variation d'énergie est donc

$$\begin{aligned}\Delta E_{mec} &= E_{mec2} - E_{mec1} \\ &= -3,0307 \times 10^9 J - -6,2514 \times 10^9 J \\ &= 3,22 \times 10^9 J\end{aligned}$$

(Notez que cette énergie correspond à l'énergie qu'on peut obtenir en brûlant environ 100 litres d'essence. Ça semble peu, mais en fait il en faut beaucoup plus parce qu'il faut également donner de l'énergie mécanique à la fusée et au carburant. En plus, ce 100 litres suppose que toute l'énergie libérée par l'essence qui brûle va en énergie mécanique alors qu'en réalité, une bonne partie va en chaleur. Il faut donc beaucoup de carburant pour compenser cette perte d'énergie en chaleur.)

La vitesse de libération

On va chercher maintenant avec quelle vitesse on doit lancer un objet à partir de la surface d'une planète pour qu'il puisse quitter la planète sans retomber sur celle-ci. On appelle cette vitesse la vitesse de libération.

Initialement, à la surface du corps céleste de masse M_c et de rayon R_c , l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned}E_{mec1} &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{-GM_c m}{r} \\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{-GM_c m}{R_c}\end{aligned}$$

Quand l'objet est rendu très loin de la planète, son énergie est

$$\begin{aligned}E_{mec2} &= \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{-GM_c m}{r_2} \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2\end{aligned}$$

L'énergie potentielle devient négligeable puisque r est très grand. Si on veut la vitesse initiale minimum pour s'éloigner de la planète, cela signifie qu'on cherche l'énergie mécanique minimum. Avec l'énergie mécanique très loin, on voit que cette énergie minimum est obtenue quand $v_2 = 0$. On a alors

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{-GM_c m}{R_c} = 0$$

Il ne reste qu'à isoler la vitesse dans cette équation pour obtenir la vitesse de libération.

Vitesse de libération

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_c}{R_c}}$$

Exemple 9.9.3

Quelle est la vitesse de libération de la Terre sachant qu'elle a une masse de $5,974 \times 10^{24}$ kg et un rayon de 6378 km?

La vitesse de libération est

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2 \left(6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (5,974 \times 10^{24} kg)}{6,378 \times 10^6 m}}$$

$$v_{lib} = 11,18 km / s$$

Cela veut dire que si on lance un objet à partir de la surface de la Terre avec une vitesse supérieure à 11,18 km/s, il ne retombera pas sur Terre. Si on le lance avec une vitesse inférieure à 11,18 km/s, il finira par revenir sur Terre (évidemment, on néglige la friction de l'air dans ce calcul). Cela veut dire aussi qu'un objet ayant une vitesse inférieure à 11,18 km/s quand il est à la surface de la Terre a une énergie mécanique négative. L'objet ne peut donc pas aller à une distance très grande où l'énergie gravitationnelle est zéro. (Rappelez-vous, l'objet ne peut pas être aux endroits où l'énergie mécanique est plus petite que U .) S'il a une vitesse supérieure à 11,18 km/s, son énergie mécanique est positive et il peut donc aller loin de la Terre où l'énergie gravitationnelle est nulle.

Résumé des équations

Le travail à partir de l'énergie de configuration

$$W = -\Delta U$$

Énergie gravitationnelle (U_g) près de la surface de la Terre

$$U_g = mgy$$

Énergie gravitationnelle (U_g) (formule générale)

$$U_g = -\frac{GMm}{r}$$

Énergie d'un ressort (U_R)

$$U_R = \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique (E_{mec})

$$E_{mec} = E_k + U$$

Principe de conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système isolé est conservée, c'est-à-dire que

$$\Delta E_{mec} = 0$$

ou

$$E_{mec1} = E_{mec2}$$

ou

$$E_{mec} = \text{constante}$$

Si le travail est fait uniquement par des forces conservatrices.

L'énergie mécanique avec une force externe

$$\Delta E_{mec} = W_{ext}$$

ou

$$E_{mec1} + W_{ext} = E_{mec2}$$

Si les forces internes sont toutes conservatrices

L'énergie mécanique avec des forces non conservatrices

$$\Delta E_{mec} = W_{non-cons}$$

ou

$$E_{mec1} + W_{non-cons} = E_{mec2}$$

L'énergie mécanique avec de la friction qui s'oppose au mouvement.

$$\Delta E_{mec} = -F_f \Delta s$$

ou

$$E_{mec1} - F_f \Delta s = E_{mec2}$$

L'énergie mécanique avec des forces externes et des forces non conservatrices

$$\Delta E_{mec} = W_{ext} + W_{non-cons}$$

ou

$$E_{mec1} + W_{ext} + W_{non-cons} = E_{mec2}$$

La force à partir de l'énergie de configuration

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Endroits où l'objet ne peut pas être

L'objet ne peut pas être aux endroits où la courbe de U est au-dessus de la ligne de E_{mec}
 Sur le graphique de U en fonction de la position

Endroit où la vitesse est maximale

La vitesse de l'objet est maximale quand l'écart entre E_{mec} et U est maximal (et que E_{mec} est au-dessus de U) sur le graphique de U en fonction de la position

Positions d'équilibres

L'objet peut être en équilibre aux endroits où la pente de U est nulle sur le graphique de U en fonction de la position. L'équilibre est stable si le graphique de U est concave vers le haut à cet endroit, l'équilibre est instable si le graphique de U est concave vers le bas à cet endroit et l'équilibre est indifférent si la concavité est nulle à cet endroit.

Énergie mécanique d'un objet de masse m autour d'un corps céleste de masse M_c

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

Vitesse de libération

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_c}{R_c}}$$

Exercices

Section 9.3 Conservation de l'énergie mécanique

Chapitre 8 du Benson :

Faire les exercices 1, 5, 6, 7 a b c, 9, 11, 13, 15, 19, 25, 27, 57 et le problème 11

Section 9.5 L'énergie mécanique en présence de forces non conservatrices

Chapitre 8 du Benson :

Faire les exercices 30, 31, 33, 59, 60, 64, 65

Section 9.7 La formule de la force à partir de la formule de l'énergie de configuration U

Chapitre 8 du Benson :

Faire l'exercice 38

Section 9.8 Le graphique de U en fonction de la position

Chapitre 8 du Benson :

Faire les exercices 40 et 45

Section 9.9 Formule générale de l'énergie gravitationnelle

Chapitre 8 du Benson :

Faire les exercices 47, 48, 53, 55, 68, 69 et 70